المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (16) 2009
ص ص [203–218]

استخدام أسلوب البوتستراب لإيجاد مقدرات جديدة للنسبة في المعاينة العشوائية البسيطة

سيف الدين ضياء الدين سعيد*

الملخص :

يتلخص هـذا البحث فـي إيجـاد مقدرات جديدة للنسبة عـوضاً عـن مقدرات **[Kadilar and Cingi ;2004]** وذلك بالاستعاضة عـن معلمـة الانحـدار للمقدرات الأخيرة والمقدرة بطريقة المربعات الصغرى الاعتيادية بمعلمة جديدة تـم تقديرها بطريقة انحدار البوتستراب تحت شروط معينة والتي كان لها الأثـر فـي إعطاء نتائج أكثر دقة من المقدرات الأولى ، واستخدم معيـار متوسـط مربعـات الخطأ (MSE) لفحص دقة المقدرات الجديدة ، كما تم إيجاد الكفاءة النسبية لجميـع المقدرات المقترحة ، ودعم الجانب النظري بأمثلة تطبيقية وتجريبية .

<u>الكلمات الدالة</u> : المعاينة العشوائية البسيطة ، مقدر النسبة ، انحدار البوتـستراب ، متوسـط مربعات الخطأ .

Employment Bootstrapping Approach to Finding New Ratio Estimators in Simple Random Sampling

Abstract :

This research boils down to find new ratio estimators instead of estimators of (**Kadilar and Cingi ;2004**) by replacing the regression parameter of the final estimators, which is estimated by ordinary least squares, with new parameter estimated by bootstrapping regression under specified conditions which have more accuracy than the first estimators. The mean square error (MSE) was used to check the accuracy of new estimators, Then we fiend Relative Efficiencies for all proposed estimators. This work was supported with numerical examples and simulations .

<u>Keywords</u>: Simple Random Sampling; Ratio Estimator; Bootstrap Regression; Mean Square Errors .

---

* مدرس مساعد/ قسم الاحصاء والمعلوماتية/ كلية علوم الحاسبات والرياضيات

تاريخ التسلم :2009/10/26 ——————— تاريخ القبول : 8 /2 /2010

1- المقدمة :

تستند طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية الى مبدأ أساسي وهـو معلوميـة التوزيع الاحتمالي لمشاهدات العينة المسحوبة لمتغير الاستجابة والتي عادةً ما تتبع التوزيع الطبيعي ، إلا أن هذا الشرط غير متحقق في معظم الحـالات لـذا وجـب الاستعانة بأسلوب أخر يعالج هذه المشكلة واحد أهم هذه الأسـاليب هـو أسـلوب التقدير باستخدام البوتستراب ، إذ يقوم هذا الأخير بتوليد عينات فرعية من العينـة المسحوبة عن طريق إتّباع أسلوب المعاينة مع إرجاع لتتـشكّل فـي متوسـطات العينات الفرعية عينةجديدة لها توزيع احتمالي يقترب جداً من التوزيع الطبيعي.

نظراً لكون مقدر النسبة من المقدرات المهمة في العديد من التطبيقات الإحـصائية قمنا بعمل تحسين لمقدرات النسبة الموضوعة من قبل **[Kadilar and Cingi;2004]** وذلك بتعويض معلمة الانحدار المقدرة بطريقة المربعـات الـصغرى الاعتياديـة بمعلمة أخرى مقدرة بطريقة انحدار البوتستراب ، وتم الحصول على نتائج تـدعم دقّة هذا الأسلوب.

اشتمل البحث على جانبين : الأول وضح فيه آلية تقدير معلمة الانحدار باستخدام أسلوب البوتستراب وإيجاد مقدرات العينة المشتقة منه ، أما الجانب الثاني فاشـتمل على تطبيق ماورد في الجانب النظري علـى مجموعـة مـن الأمثلـة (تطبيقيـة وتجريبية) .

2- مقدر النسبة الاعتيـادي : Ordinary Ratio estimator

[علوان ، 1993]

في العديد من الدراسات والبحوث تتم الاستفادة أو توظيف بعض المعلومـات المرتبطة مع متغير الدراسة موضوع الاهتمام في الحصول على مقدرات ذوات دقة عالية أعلى مما لو تم استخدام بيانات متغير الدراسة لوحدها، ويعد مقدر النسبة احد أهم المقدرات التي تقوم بتوظيف هذه المعلومـات ، فـإذا افترضـنا أن المتغيـر $(Y_i\ ,\ i=1,2,....,N)$ يمثل متغير الدراسـة وان $(X_i\ ,i=1,2,....,N)$ يمثـل

المتغير المساعد ذا المعلومات الإضافية والذي يكون مرتبطاً ارتباطاً وثيقاً بمتغير الدراسة ، عندئذٍ تعرف النسبة (Y) إلى (X) بالعلاقة الآتية :

$$R = \frac{\overline{Y}}{\overline{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i}{\sum_{i=1}^{N} X_i} \quad \text{......................(1)}$$

إذ أن (N) : حجم المجتمع .

أما النسبة المقدرة باستخدام عينة عشوائية حجمها (n) فتعرف بالعلاقة الآتية :

$$\hat{R} = \frac{\overline{y}}{\overline{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \quad \text{..........................(2)}$$

إذ أن: $\overline{Y}$ ، $\overline{X}$ ، $\overline{y}$ و $\overline{x}$ تمثل متوسط المتغير الرئيسي والمساعد في المجتمع والعينة على التوالي ، وان (n) حجم العينة .

فعندما يكون الاهتمام منصباً حول تقدير الوسط الحسابي لمتغير الدراسة في المجتمع ($\overline{Y}$) فإنه وباستخدام النسبة يمكن الحصول عليه بالعلاقة الآتية :

$$\hat{\overline{Y}}_R = \hat{R}\overline{X} = \frac{\overline{y}}{\overline{x}}\,\overline{X} \quad \text{........................(3)}$$

إن متوسط مربعات الخطأ (MSE) للمقدر في المعادلة (3) هو كالآتي :

$$MSE(\hat{\overline{Y}}_R) \cong E[\hat{\overline{Y}}_R - \overline{Y}]^2 = \frac{(1-f)}{n}\left[\sigma^2_{(y)} - 2R\sigma_{(xy)} + R^2\sigma^2_{(x)}\right] \text{..........(4)}$$

إذ أن : $f = \frac{n}{N}$: يمثل كسر المعاينة .

$(\sigma^2_{(x)}, \sigma^2_{(y)})$: تباين متغير الدراسة والمتغير المساعد على التوالي .

$(\sigma_{(x,y)})$: التباين المشترك بين متغير الدراسة والمتغير المساعد .

3- مقدرات [Kadilar and Cingi] للنسبة : Kadilar and Cingi's Ratio Estimators اقترح الباحثان **[Kadilar and Cingi ;2004]** مجموعة من العلاقات لتقدير النسبة وكالآتي :

$$\hat{Y}_{R(KC)_1} = \frac{\bar{y} + \hat{\beta}_{ols}(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{x}} \bar{X} \qquad \text{........(5)}$$

$$\hat{Y}_{R(KC)_2} = \frac{\bar{y} + \hat{\beta}_{ols}(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{x} + C_{(x)}} \bar{X} + C_{(x)} \qquad \text{........(6)}$$

$$\hat{Y}_{R(KC)_3} = \frac{\bar{y} + \hat{\beta}_{ols}(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{x} + B_{2(x)}} \bar{X} + B_{2(x)} \qquad \text{........(7)}$$

$$\hat{Y}_{R(KC)_4} = \frac{\bar{y} + \hat{\beta}_{ols}(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{x}B_{2(x)} + C_{(x)}} \bar{X} B_{2(x)} + C_{(x)} \qquad \text{........(8)}$$

$$\hat{Y}_{R(KC)_5} = \frac{\bar{y} + \hat{\beta}_{ols}(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{x}C_{(x)} + B_{2(x)}} \bar{X} C_{(x)} + B_{2(x)} \qquad \text{........(9)}$$

إذ أن :

$C_{(x)}$: معامل الاختلاف للمتغير المساعد في المجتمع

$B_{2(x)}$: معامل التفاطح للمتغير المساعد في المجتمع

$\hat{\beta}_{ols}$: معامل الانحدار ويقدر باستخدام طريقة المربعـات الـصغرى الاعتياديـة بالصيغة الآتية :

$$\hat{\beta}_{ols} = \frac{S_{(xy)}}{S^2_{(x)}}$$

وان متوسط مربعات الخطأ للمقدرات السابقة يعطى بالصيغة الآتية :

$$MSE[\hat{Y}_{R(KC)_s}] \cong \frac{1-f}{n}[R^2_{(KC)_s}\sigma^2_{(x)} + 2\beta_{ols}R_{(KC)_s}\sigma^2_{(x)} + \beta^2_{ols}\sigma^2_{(x)}$$
$$- 2R_{(KC)_s}\sigma_{(xy)} - 2\beta_{ols}\sigma_{(xy)} + \sigma^2_{(y)}] \quad , \; s = 1,2,..,5 \qquad \text{.....(10)}$$

إذ أن :

$$\beta_{ols} = \frac{\sigma_{(xy)}}{\sigma^2_{(x)}}$$

$$R_{(KC)_1} = R = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}$$

$$R_{(KC)_2} = \frac{\bar{Y}}{\bar{X} + C_{(x)}}$$

$$R_{(KC)_3} = \frac{\bar{Y}}{\bar{X} + B_{2(x)}}$$

$$R_{(KC)_4} = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}B_{2(x)} + C_{(x)}}$$

$$R_{(KC)_5} = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}C_{(x)} + B_{2(x)}}$$

وقد اثبت **[Kadilar and Cingi ;2004]** أن المقدرات في المعادلات (5-9) هي أعلى دقّة من مقدر النسبة الاعتيادي في المعادلة (3) .

4- مقدرات النسبة المقترحة : Suggested Ratio Estimators

في العديد من الدراسات تتضمن البيانات أحياناً مجموعة من المشاكل منها صغر حجم البيانات أو احتواؤها على القيم الشاذة (Outliers) أو أن هذه البيانات لا تتوزع وفق توزيع احتمالي معين كالتوزيع الطبيعي مثلاً ، وهذه المشاكل من شأنها إضعاف القوة التفسيرية لمعامل الانحدار والذي يبين طبيعة علاقة المتغير المساعد ومدى تأثيره في متغير الدراسة ، لذا وعلى هذا الأساس وجدت عدة طرائق لمعالجة هذه المشاكل أو احتوائها وإحدى هذه الطرائق هو أسلوب البوتستراب وهذا الأخير يمكن وصفه وبشكل مبسط كالآتي :

تستند طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية الى مبدأ تصغير الأخطاء إلى اقل ما يمكن وصولاً إلى تقدير معلمات نموذج الانحدار المثلى ، وبشكل عام يعرف نموذج الانحدار بالعلاقة الآتية :

$$\underline{y} = \underline{x}\underline{\beta}_{ols} + \underline{\varepsilon}$$

إذ أن :

$\underline{y}$: متجه متغير الدراسة (الاستجابة) وهو ذو بعد $(n*1)$

$\underline{x}$: مصفوفة المتغير أو المتغيرات المساعدة (التوضيحية) وهـي ذوات بعـد $[n*(P+1)]$

$\underline{\beta}_{ols}$: متجه معلمات الانحدار وهي ذوات بعد $[(P+1)*1]$

$\underline{\varepsilon}$: متجه الأخطاء العشوائية وهو ذو بعد $(n*1)$

$\mathbf{P}$: عدد المتغيرات المساعدة (التوضيحية)

فإذا كانت الدراسة متمثلة بعلاقة متغير مساعد واحد (x) مع متغير الدراسـة (y) فيمكن الحصول على علاقة رياضية باستخدام الانحدار الخطـي لتقـدير الوسـط الحسابي للمجتمع كما في المعادلة الآتية :

$$\bar{y}_{lr} = \bar{y} + \hat{\beta}_{ols}(\bar{X} - \bar{x})$$

إذ أن :

$\bar{y}_{lr}$: الوسط الحسابي لمتغير الدراسة المقدر بطريقة الانحدار .

$\bar{X}$: الوسط الحسابي للمجتمع للمتغير المساعد وقيمته معلومـة . **[Cochran ;1977]**

يعد أسلوب البوتستراب احـد أسـاليب المعاينـة بإرجـاع (Sampling With Replacement) ولتقدير معلمة معامل الانحدار باسـتخدام البوتـستراب يمكـن استخدام إحدى أساليب المعاينة الآتية : **[Efron and Tibshirani ;1993]**

1- المعاينة بإرجاع بثبوت (x) Fixed – (x) Re-sampling

2- المعاينة بإرجاع مع تغير (x) Random – (x) Re-sampling

وفي هذا البحث سيتم استخدام النوع الأول من المعاينة ، ولغرض الحصول علـى مقدرات معلمات الانحدار يتم إتباع الخطوات الآتية :

<u>الخطوة الأولى</u> :

تقدير معلمات الانحدار بصورة اعتيادية من خلال انحدار y/x باسـتخدام طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية عن طريق العلاقة الآتية :

$$\hat{\beta}_{ols} = (x'x)^{-1}x'y$$

<u>الخطوة الثانية</u> :

إيجاد متجه القيم التقديرية لمتغير الدراسة باستخدام العلاقة الآتية :

$$\hat{Y}_i = f(x_i, \hat{\beta}_{ols}) = \hat{\beta}_o + \hat{\beta}_1 x_i$$

إذ أن :

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{(xy)}}{S^2_{(x)}} \quad ،$$

$$\hat{\beta}_o = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

الخطوة الثالثة :

إيجاد قيم متجه الأخطاء العشوائية والمتمثل بالفرق بين القيم الحقيقية والقيم المقدرة لمتغير الدراسة أي أن :

$$\varepsilon_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

الخطوة الرابعة :

إجراء عملية المعاينة بإرجاع على قيم متجه الأخطاء وتكوين العينات البوتسترابية والتي عددها (n^n) ، بحيث أن كل عينة بوتسترابية حجمها (n) .

الخطوة الخامسة :

سحب عدد معين من العينات البوتسترابية المتولدة من الخطوة الرابعة بشكل عشوائي وبحجم (r) من العينات البوتسترابية .

الخطوة السادسة :

إيجاد قيم متغير الدراسة البوتسترابي $(y^{(b)}_{i(j)}\ , j = 1,2,\dots, r)$ لكل عينة بوتسترابية أي سيتكون لدينا (r) من متغير الدراسة البوتسترابي وكالآتي :

$$y^{(b)}_{i(j)} = f(x_i, \hat{\beta}_{ols}) + \varepsilon^{(b)}_{i(j)} \qquad i = 1,2,..n \quad , \quad j = 1,2,\dots, r$$

أي أن :

$$y^{(b)}_{i(1)} = f(x_i, \hat{\beta}_{ols}) + \varepsilon^{(b)}_{i(1)} \quad , \quad i = 1,2,..n$$
$$y^{(b)}_{i(2)} = f(x_i, \hat{\beta}_{ols}) + \varepsilon^{(b)}_{i(2)} \quad , \quad i = 1,2,..n$$
$$\vdots$$
$$y^{(b)}_{i(r)} = f(x_i, \hat{\beta}_{ols}) + \varepsilon^{(b)}_{i(r)} \quad , \quad i = 1,2,..n$$

(b) : رمز يشير إلى أن القياسات المحسوبة تمت باستخدام أسلوب البوتستراب .

الخطوة السابعة :

تقدير معلمات الانحدار البوتسترابية باستخدام طريقة المربعات الصغرى لكل عينة بوتسترابية وذلك من خلال انحدار $[\, y_{(j)}^{(b)} \mid x \quad , j = 1,2,\ldots,r]$ وبالصيغة الاتية :

$$\hat{\beta}_{ols}^{(b)} = \hat{\beta}_{(j)}^{(b)} = (x'x)^{-1} x' y_{(j)}^{(b)}$$

و في المحصلّة النهائية سيتم الحصول على عدد (r) من معلمة القطع $(\hat{\beta}_o)$ و (r) من معلمة معامل الانحدار $(\hat{\beta}_1)$... وهكذا لبقية المعلمات إن وجدت . ولغرض الحصول على قيمة واحدة لكل من المقدرات السابقة يتم إيجاد المعدل لها أي أن :

$$\hat{\beta}_o^{(b)} = \frac{\sum_{j=1}^{r} \hat{\beta}_{o(j)}^{(b)}}{r}$$

$$\hat{\beta}_1^{(b)} = \frac{\sum_{j=1}^{r} \hat{\beta}_{1(j)}^{(b)}}{r}$$

$$\vdots$$

$$\hat{\beta}_p^{(b)} = \frac{\sum_{j=1}^{r} \hat{\beta}_{p(j)}^{(b)}}{r}$$

وبالعودة إلى مقدرات النسبة في المعادلات (5-9) والاستعاضة عـن $(\hat{\beta}_{ols})$ بـ ـ $(\hat{\beta}_{ols}^{(b)})$ ، نحصل على المقدرات الجديدة الآتية :

$$\hat{\hat{Y}}_{pr1} = \frac{\bar{y} + \hat{\beta}_{ols}^{(b)}(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{x}} \bar{X} \qquad ....(10)$$

$$\hat{\hat{Y}}_{pr2} = \frac{\bar{y} + \hat{\beta}_{ols}^{(b)}(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{x} + C_{(x)}} [\bar{X} + C_{(x)}] \qquad ....(11)$$

$$\hat{\hat{Y}}_{pr3} = \frac{\bar{y} + \hat{\beta}_{ols}^{(b)}(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{x} + B_{2(x)}} [\bar{X} + B_{2(x)}] \qquad ....(12)$$

$$\hat{\hat{Y}}_{pr4} = \frac{\bar{y} + \hat{\beta}_{ols}^{(b)}(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{x}B_{2(x)} + C_{(x)}} [\bar{X} B_{2(x)} + C_{(x)}] \qquad ....(13)$$

$$\hat{\hat{Y}}_{pr5} = \frac{\bar{y} + \hat{\beta}_{ols}^{(b)}(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{x}C_{(x)} + B_{2(x)}}[\bar{X}C_{(x)} + B_{2(x)}] \qquad ....(14)$$

و باستخدام سلسلة تايلور قمنا بإيجاد معادلة متوسط مربعات الخطأ (MSE) للمقدرات المقترحة وكالآتي :

$$MSE[\hat{\hat{Y}}_{R(pr)_s}] \cong \frac{1-f}{n}[R^2_{(KC)_s}\sigma^2_{(x)} + 2\beta^{(b)}_{ols}R_{(KC)_s}\sigma^2_{(x)} + \beta^{2(b)}_{ols}\sigma^2_{(x)} - 2R_{(KC)_s}\sigma_{(xy)} - 2\beta^{(b)}_{ols}\sigma_{(xy)} + \sigma^2_{(y)}] \quad , \; s = 1,2,..,5 \qquad ....(15)$$

إذ أن $\beta^{(b)}_{ols}$ يمثل معامل انحدار البوتستراب للمجتمع وفي بعض الأحيان يصعب إيجاده لذا يمكن الاستعاضة عنه بـ ($\hat{\beta}^{(b)}_{ols}$) لتصبح المعادلة (15) بالصيغة الآتية :

$$MSE[\hat{\hat{Y}}_{R(pr)_s}] \cong \frac{1-f}{n}[R^2_{(KC)_s}\sigma^2_{(x)} + 2\hat{\beta}^{(b)}_{ols}R_{(KC)_s}\sigma^2_{(x)} + \hat{\beta}^{2(b)}_{ols}\sigma^2_{(x)} - 2R_{(KC)_s}\sigma_{(xy)} - 2\hat{\beta}^{(b)}_{ols}\sigma_{(xy)} + \sigma^2_{(y)}] \quad , \; s = 1,2,..,5 \qquad ....(16)$$

4- دقة المقدرات المقترحة : Precession of Suggested Estimators

في هذه الفقرة ستتم المقارنة بين دقة المقدرات المقترحة والمقدرات الخاصة بالباحثين **[Kadilar and Cingi;2004]** وكالآتي :

$$MSE[\hat{\hat{Y}}_{R(Pr)_s}] < MSE[\hat{\hat{Y}}_{R(KC)_s}] \qquad , \qquad s = 1,2,..,5$$

$$\therefore R^2_{(KC)_s}\sigma^2_{(x)} + 2\beta^{(b)}_{ols}R_{(KC)_s}\sigma^2_{(x)} + \beta^{2(b)}_{ols}\sigma^2_{(x)} - 2R_{(KC)_s}\sigma_{(xy)} - 2\beta^{(b)}_{ols}\sigma_{(xy)} + \sigma^2_{(y)}$$
$$< R^2_{(KC)_s}\sigma^2_{(x)} + 2\beta_{ols}R_{(KC)_s}\sigma^2_{(x)} + \beta^2_{ols}\sigma^2_{(x)} - 2R_{(KC)_s}\sigma_{(xy)} - 2\beta_{ols}\sigma_{(xy)} + \sigma^2_{(y)}$$

$$\Rightarrow 2\beta^{(b)}_{ols}R_{(KC)_s}\sigma^2_{(x)} + \beta^{2(b)}_{ols}\sigma^2_{(x)} - 2\beta^{(b)}_{ols}\sigma_{(xy)} - 2\beta_{ols}R_{(KC)_s}\sigma^2_{(x)} - \beta^2_{ols}\sigma^2_{(x)} + 2\beta_{ols}\sigma_{(xy)} < 0$$

$$\Rightarrow 2R_{(KC)_s}\sigma^2_{(x)}(\beta^{(b)}_{ols} - \beta_{ols}) - 2\sigma_{(xy)}(\beta^{(b)}_{ols} - \beta_{ols}) + \sigma^2_{(x)}(\beta^{2(b)}_{ols} - \beta^2_{ols}) < 0$$

$$\Rightarrow (\beta^{(b)}_{ols} - \beta_{ols})[2R_{(KC)_s}\sigma^2_{(x)} - 2\sigma_{(xy)} + \sigma^2_{(x)}(\beta^{(b)}_{ols} + \beta_{ols})] < 0$$

ويمكن إجمال الافتراضات التي تحقق عندها العلاقة الأخيرة بالافتراضين الأخيرين :

الافتراض الأول ، إذا كان :

- $\beta_{ols}^{(b)} - \beta_{ols} > 0 \quad \Rightarrow \quad \beta_{ols}^{(b)} > \beta_{ols}$
- $2R_{(KC)_s}\sigma_{(x)}^2 - 2\sigma_{(xy)} + \sigma_{(x)}^2(\beta_{ols}^{(b)} + \beta_{ols}) < 0 \quad ....(17)$

وان :

ومن العلاقة (17) يمكننا استنتاج ما ياتي :

$$\sigma_{(x)}^2(\beta_{ols}^{(b)} + \beta_{ols}) < -2R_{(KC)_s}\sigma_{(x)}^2 + 2\sigma_{(xy)}$$

$$\beta_{ols}^{(b)} + \beta_{ols} < -2R_{(KC)_s} + 2\frac{\sigma_{(xy)}}{\sigma_{(x)}^2}$$

وبما أن : $\beta_{ols} = \frac{\sigma_{(xy)}}{\sigma_{(x)}^2}$

$$\beta_{ols}^{(b)} + \beta_{ols} < -2R_{(KC)_s} + 2\beta_{ols}$$

$$\beta_{ols}^{(b)} - \beta_{ols} < -2R_{(KC)_s}$$

أي انه وبالاعتماد على هاتين النتيجتين يمكننا القول بان المقدرات المقترحـة هـي أدق من المقدرات الاعتيادية إذا كان :

$$\Rightarrow \; 0 < \beta_{ols}^{(b)} - \beta_{ols} < -2R_{(KC)_s}$$

الافتراض الثاني ، إذا كان :

$\beta_{ols}^{(b)} - \beta_{ols} < 0 \quad \Rightarrow \quad \beta_{ols}^{(b)} < \beta_{ols}$

- $2R_{(KC)_s}\sigma_{(x)}^2 - 2\sigma_{(xy)} + \sigma_{(x)}^2(\beta_{ols}^{(b)} + \beta_{ols}) > 0 \quad ....(18)$

وان :

ومن العلاقة (18) يمكننا استنتاج ما ياتي :

$$\sigma_{(x)}^2(\beta_{ols}^{(b)} + \beta_{ols}) > -2R_{(KC)_s}\sigma_{(x)}^2 + 2\sigma_{(xy)}$$

$$\beta_{ols}^{(b)} + \beta_{ols} > -2R_{(KC)_s} + 2\beta_{ols}$$

$$\beta_{ols}^{(b)} - \beta_{ols} > -2R_{(KC)_s}$$

وبالاعتماد على نتيجتي المقدارين نجد انه في حالة

$$\Rightarrow\ -2R_{(KC)_s} < \beta_{ols}^{(b)} - \beta_{ols} < 0$$

فانه يمكننا القول أيضاً بان المقدرات المقترحة هي أدق من المقدرات الاعتيادية .

لذا وعلى أساس ما تم التوصل إليه في النتيجتين أعلاه يمكـن وضـع الـشرطين الآتيين :

$$0 < \beta_{ols}^{(b)} - \beta_{ols} < -2R_{(KC)_s} \qquad , \ ......(19)$$

أو:

$$-2R_{(KC)_s} < \beta_{ols}^{(b)} - \beta_{ols} < 0 \qquad , \ ......(20)$$

وعند تحقق احد (الشرطين) من المعادلتين **(19)** و **(20)** ، فإن المقدرات المقترحة تكون أكثر دقة من مقدرات **[Kadilar and Cingi;2004]** .

5- الجانب التطبيقي :

في هذا الجانب من البحث تم تطبيق ما ورد في الجانب النظري علـى مثال تطبيقي

والمتمثل بسحب عينة عشوائية حجمها (3) مفردة من مجتمع قوامه (12) مفـردة , إذ تمثل متغير الدراسة (Y) بحجم القروض والمتغير المساعد (X) بحجم الودائـع للقطاع الخاص والمقدمة من قبل المصارف العراقية للفترة **1991-2002** / مليون دينار . **[باشا ، 2009]**

ولغرض حساب الكفاءة النسبية Relative Efficiency للمقدرات المقترحـة تـم استخدام الصيغة الآتية :

$$RE(\hat{\bar{Y}}_{R(Pr)_s}) = \frac{MSE[\hat{\bar{Y}}_{R(Pr)_s}]}{MSE[\hat{\bar{Y}}_{R(KC)_s}]} \qquad ......(21)$$

والجداول (1) ، (2) و(3) تمثل المعلومات والنتائج التي تم الحصول عليها علـى التوالي :

الجدول(1) المعلومات الخاصة بالبيانات

$N = 12$	$\bar{Y} = 69763.33$	$R_{(KC)_1} = 0.173704$
$n = 3$	$\bar{X} = 27421.70$	$R_{(KC)_2} = 0.173704$
$\rho = 0.96$	$\sigma_{(y)} = 109727.2$	$R_{(KC)_3} = 0.173704$
$C_x = 1.025$	$\sigma_{(x)} = 411816.3$	$R_{(KC)_4} = 0.176349$
$\beta_{ols} = 0.256$	$\sigma_{(xy)} = 4.338E+10$	$R_{(KC)_5} = 0.169404$
$\beta^{(b)}_{ols} = 0.194$	$\beta_2(x) = 0.985$	$n^n = r = 27$

الجدول (2) نتائج متوسطات مربعات الخطأ وقيم ناتج الشرط

المقدّرات	MSE		ناتج الشرط
	المقدرات الاعتيادية	المقدرات المقترحة	$-2R_{(KC)_s} < \beta^{b}_{ols} - \beta_{ols} < 0$
1	1.518E+09	767021259	-0.3474 < -0.062 < 0
2	1.518E+09	767017050	-0.3474 < -0.062 < 0
3	1.518E+09	767017216	-0.3474 < -0.062 < 0
4	1.558E+09	792416786	-0.3527 < -0.062 < 0
5	1.456E+09	726993426	-0.3388 < -0.062 < 0

من ملاحظة الجدول (2) نجد أن الطرائق المقترحة قد أعطت نتائج أعلى دقة من الطرائق الأخرى وذلك لامتلاكها اقل متوسط مربعات خطأ , كما يمكن ملاحظة تحقق الشروط للمعادلات (10-14).

الجدول (3) الكفاءة النسبية بين المقدرات المقترحة والاعتيادية

$RE(\hat{\bar{Y}}_{R(Pr)_s})$	$\hat{\bar{Y}}_{R(KC)_1}$	$\hat{\bar{Y}}_{R(KC)_2}$	$\hat{\bar{Y}}_{R(KC)_3}$	$\hat{\bar{Y}}_{R(KC)_4}$	$\hat{\bar{Y}}_{R(KC)_5}$
$\hat{\bar{Y}}_{R(Pr)_1}$	0.505	0.505	0.505	0.492	0.527
$\hat{\bar{Y}}_{R(Pr)_2}$	0.505	0.505	0.505	0.492	0.527
$\hat{\bar{Y}}_{R(Pr)_3}$	0.505	0.505	0.505	0.492	0.527
$\hat{\bar{Y}}_{R(Pr)_4}$	0.522	0.522	0.522	0.509	0.544
$\hat{\bar{Y}}_{R(Pr)_5}$	0.479	0.479	0.479	0.467	0.499

من الجدول (3) نجد أن المقدرات المقترحة قد أثبتت كفاءة نسبية عالية مقارنة مع المقدرات الاعتيادية الأخرى .

6- الجانب التجريبي :

في هذا الجانب تم توليد بيانات عشوائية باستخدام التوزيـع الطبيعـي (Normal Distribution) , إذ تم توليـد (1000) مفـردة تمثـل المتغيـر المـساعد (X) وبالاعتماد على هذا المتغير تم حساب متغير الدراسة (Y) وفق الصيغة الاتية :

$$Y_i = 15 + 2.5X_i + \varepsilon_i \qquad \ldots\ldots.. (21)$$

إذ أن :

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \quad , \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$$

علما بأنه تم تلويث هذا المتغير بقيم كبيرة نسبياً (تختلف عن النسق العام للبيانـات) ومن ثم سحبت عينات عشوائية بأحجـام مختلفـة قوامهـا (20)، (50)، (75) ، (100) و (150) مفردة بهدف الحصول على النتائج والمتمثلة بالجدولين الآتيين :

الجدول (4) نتائج متوسطات مربعات الخطأ وقيم ناتج الشرط

حجم العينة	MSE			ناتج الشرط
	المقدّرات	المقدّرات الاعتيادية	المقدّرات المقترحة	$-2R_{(KQ)_S} < \beta^b_{ols} - \beta_{ols} < 0$
n = 20	1	678.71874	146.91044	-5.719 < -2.2 < 0
	2	516.08502	120.21697	-4.821 < -2.2 < 0
	3	669.5598	144.8345	-5.672 < -2.2 < 0
	4	6231.0486	3710.2094	-18.858 < -2.2 < 0
	5	196.91541	204.1946	-2.158 < -2.2 < 0
n = 50	1	263.17665	50.761275	-5.719 < -2.411 < 0
	2	200.1146	45.466259	-4.821 < -2.411 < 0
	3	259.62523	50.219728	-5.672 < -2.411 < 0
	4	2416.1209	1358.4781	-18.858 < -2.411 < 0
	5	76.354956	93.021755	-2.158 < -2.411 < 0
n = 75	1	170.83397	39.794963	-5.719 < -2.086 < 0
	2	129.89895	31.303174	-4.821 < -2.086 < 0
	3	168.52866	39.180065	-5.672 < -2.086 < 0
	4	1568.3592	962.62202	-18.858 < -2.086 < 0
	5	49.563743	47.182285	-2.158 < -2.086 < 0
n = 100	1	124.66263	25.174217	-5.719 < -2.32 < 0
	2	94.791126	21.633259	-4.821 < -2.32 < 0
	3	122.98037	24.863882	-5.672 < -2.32 < 0
	4	1144.4783	659.73049	-18.858 < -2.32 < 0
	5	36.168137	41.096674	-2.158 < -2.32 < 0
n = 150	1	78.491283	15.893324	-5.719 < -2.315 < 0
	2	59.683302	13.628103	-4.821 < -2.315 < 0
	3	77.432086	15.696067	-5.672 < -2.315 < 0
	4	720.59746	415.95154	-18.858 < -2.315 < 0
	5	22.772531	25.776886	-2.158 < -2.315 < 0

من ملاحظة الجدول (4) نجد أن المقدرات المقترحة (1-4) قد أعطت نتائج أعلى دقة من المقدرات الأخرى وذلك لامتلاكها اقل متوسط مربعات خطأ باستثناء المقدر الخامس الذي أعطى نتائج اقل دقة من المقدر الاعتيادي الخـامس ، كمـا يمكـن ملاحظة تحقق الشروط للمعدلات الأربعة الأولى باستثناء الشرط الخامس الذي لـم يتحقق .

الجدول (5)الكفاءة النسبية بين المقدرات المقترحة والاعتيادية

حجم العينة	$RE(\hat{\bar{Y}}_{R(Pr)_s})$	$\hat{\bar{Y}}_{R(KC)_1}$	$\hat{\bar{Y}}_{R(KC)_2}$	$\hat{\bar{Y}}_{R(KC)_3}$	$\hat{\bar{Y}}_{R(KC)_4}$	$\hat{\bar{Y}}_{R(KC)_5}$
n = 20	$\hat{\bar{Y}}_{R(Pr)_1}$	0.217	0.285	0.219	0.024	0.746
	$\hat{\bar{Y}}_{R(Pr)_2}$	0.177	0.233	0.180	0.019	0.611
	$\hat{\bar{Y}}_{R(Pr)_3}$	0.213	0.281	0.216	0.023	0.736
	$\hat{\bar{Y}}_{R(Pr)_4}$	5.467	7.189	5.541	0.595	18.842
	$\hat{\bar{Y}}_{R(Pr)_5}$	0.301	0.396	0.305	0.033	1.037
n = 50	$\hat{\bar{Y}}_{R(Pr)_1}$	0.193	0.254	0.196	0.021	0.665
	$\hat{\bar{Y}}_{R(Pr)_2}$	0.173	0.227	0.175	0.019	0.596
	$\hat{\bar{Y}}_{R(Pr)_3}$	0.191	0.251	0.193	0.021	0.658
	$\hat{\bar{Y}}_{R(Pr)_4}$	5.162	6.789	5.233	0.562	17.792
	$\hat{\bar{Y}}_{R(Pr)_5}$	0.354	0.465	0.358	0.039	1.218
n = 75	$\hat{\bar{Y}}_{R(Pr)_1}$	0.233	0.306	0.236	0.025	0.803
	$\hat{\bar{Y}}_{R(Pr)_2}$	0.183	0.241	0.186	0.020	0.632
	$\hat{\bar{Y}}_{R(Pr)_3}$	0.229	0.302	0.233	0.025	0.791
	$\hat{\bar{Y}}_{R(Pr)_4}$	5.635	7.411	5.712	0.614	19.422
	$\hat{\bar{Y}}_{R(Pr)_5}$	0.276	0.363	0.280	0.030	0.952
n = 100	$\hat{\bar{Y}}_{R(Pr)_1}$	0.202	0.266	0.205	0.022	0.696
	$\hat{\bar{Y}}_{R(Pr)_2}$	0.174	0.228	0.176	0.019	0.598
	$\hat{\bar{Y}}_{R(Pr)_3}$	0.200	0.262	0.202	0.022	0.688
	$\hat{\bar{Y}}_{R(Pr)_4}$	5.292	6.960	5.365	0.577	18.241
	$\hat{\bar{Y}}_{R(Pr)_5}$	0.330	0.434	0.334	0.036	1.136

حجم العينة	$RE(\hat{\hat{Y}}_{R(Pr)_s})$	$\hat{Y}_{R(KC)_1}$	$\hat{Y}_{R(KC)_2}$	$\hat{Y}_{R(KC)_3}$	$\hat{Y}_{R(KC)_4}$	$\hat{Y}_{R(KC)_5}$
n = 150	$\hat{\hat{Y}}_{R(Pr)_1}$	0.203	0.266	0.205	0.022	0.698
	$\hat{\hat{Y}}_{R(Pr)_2}$	0.174	0.228	0.176	0.019	0.599
	$\hat{\hat{Y}}_{R(Pr)_3}$	0.200	0.263	0.203	0.022	0.689
	$\hat{\hat{Y}}_{R(Pr)_4}$	5.299	6.969	5.372	0.577	18.266
	$\hat{\hat{Y}}_{R(Pr)_5}$	0.328	0.432	0.333	0.036	1.132

من ملاحظة الجدول (5) نجد أن المقدرات المقترحة من (1-3) قد أثبتت كفاءة عالية مقارنةً بالمقدرات الأخرى ، أما المقدر المقترح الرابع فقد اثبت كفاءته فقط مع المقدر الاعتيادي الرابع في حين تبين عدم كفاءته مع بقية المقدرات الاعتيادية الأخرى ، أما بالنسبة للمقدر المقترح الخامس فقد كان غير كفوء مقارنةً بالمقدر الاعتيادي الخامس فقط ، في حين اثبت كفاءته مقارنةً بالمقدرات الاعتيادية الاخرى.

8- الاستنتاجات :

1- نلاحظ من خلال النتائج التي أظهرها الجانب التطبيقي والتجريبي بان المقدرات المقترحة من (1-4) قد أعطت نتائج أعلى دقة من بقية المقدرات الأخرى باستثناء المقدر المقترح الخامس الذي لم يظهر بالمستوى المطلوب أمام المقدر الاعتيادي الخامس .

2- أظهرت النتائج التجريبية كفاءة نسبية عالية للمقدرات المقترحة من (1-3) في حين اثبت المقدر المقترح الرابع عدم كفاءته مع بقية المقدرات باستثناء المقدر الاعتيادي الرابع ، أما المقدر المقترح الخامس فقد اثبت عدم كفاءته مقارنةً مع المقدر الخامس الاعتيادي فقط .

3- أظهرت النتائج التجريبية بأنه كلما زاد حجم العينة قل متوسط مربعات الخطأ في حين اظهر الجانب التطبيقي دقة عالية للمقدرات المقترحة بسبب استخدام أسلوب البوتستراب بحجم صغير للمجتمع والعينة .

4- أظهرت النتائج التطبيقية اختلافاً عن النتائج التجريبية للمقدر الخـامس بـسبب كبر حجم العينة و المجتمع للجانب التجريبي مما أدى إلى تذبـذب نتـائج معامـل التحديد والتفاطح ومن ثم أدى إلى تقارب في نتائج المقـدر المقتـرح والاعتيـادي الخامس فقط .

9- التوصيات :

1- اعتماد المقدرات المقترحة من (1-3) في إيجاد القيمة التقديرية للوسط الحسابي للنسبة .

2- اعتماد أسلوب البوتستراب في التقدير في حالة صغر حجم العينة أو كبره.

3- عدم اعتماد دمج مقياسي معامل التحديد والتفاطح في التقـدير وذلـك لتذبـذب نتائجهما .

10- المصـادر :

1- باشا ، كريم عبد النبي ، (2009) ،"المؤسسة المالية والمصرفية ودورها فـي توفير الموارد وتوجيه الاستثمار في العراق "، مجلة المنـصور ، العـدد (12) ، ص37-72 ، كلية المنصور الجامعة ، بغداد - العراق .

2-علوان ، حسين ، (1993) ، "طرق المعاينة " ، الطبعة الأولـى ، دار الفرقـان للنشر والتوزيع ، جامعة اليرموك ، عمان - الأردن .

3-Chrishtopher Z. M. , (1997)," Monte Carlo Simulation ",SAGE publication , New Delhi .

4-Efron, B. and Ttibshirani, R.J., (1993),"An Introduction to the Bootstrap ", New York :Chapman and Hall .

5-Kadilar, C. and Cingi, H. , (2004) , " Ratio Estimator in Simple Random Sampling " ,Applied Mathematics and computation ,151, PP.(893-902).

6-William G. Cochran , (1977) , " Sampling Techniques " , 3rd. edition , John Wiley & Sons , Inc. ,USA .