المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (11) 2007
ص ص [22–33]

توظيف اسلوب المكونات الرئيسية
في التكهن بنماذج بوكس – جينكنز

د. ظافر رمضان مطر* الهام عبد الكريم حسين**

المستخلص:

تم في هـذا البحـث توظيـف أسـلوب المكونـات الرئيسـية Principal Components لاغراض السلاسل الزمنية في التكهن . لقد تم إجراء التكهن على بيانات سبق أن شخِصها الباحث (Ljung , 1999) اذ أمكن الحصول على تكهن ذي مواصفات إحصائية جيدة عند استخدام اسلوب المكونات الرئيسية.

Employ the Principal Componants Manner in the Forecasting by Box – Jenkins Models

ABSTARCT

In this Research, we employ Principal Components manner for the forecasting in the time series , we are making the forecast to a data which are used from the researcher (Ljung,1999). When we use the principal components,we obtain a good forecasting with a good statistcal specifics

المقدمـــــة :

يعد التكهن من المسائل المهمة منذ أمد بعيد وبقي هذا الموضوع محـط اهتمام الباحثين في سائر الحقول ، اذ انه يُعد حجر الأساس في تحديـد وتخطـيط السياسات المستقبلية ، ونظرا" لأهميته فان الأساليب المستخدمة في تحسين الـتكهن

* استاذ مساعد/ كلية علوم الحاسبات والرياضيات
** مدرس مساعد/ المعهد التقني / الموصل / قسم الإحصاء والمعلوماتية

تاريخ التسلم : 27/ 8 /2006 ـــــــــــــــــ تاريخ القبول : 2/ 11 /2006

تتطور بين الحين والأخر ، فبعد أن كان التكهن يعتمد على الطرائق التقليدية مثل : التنعيم الاسي المنفرد والمضاعف Single and Double Exponantial Smoothing والمتوسطات المتحركة Moving Average ... فقد حدثت قفزة نوعية في التكهن من خلال استخدام الشبكات العصبية Neural Networks والخوارزميات الجينية Genetic Algorithims . وفي هذا البحث فحص لدقة تكهن المكونات الرئيسية المستخلصة من السلاسل الزمنية المتعددة وباستخدام نماذج بوكس – جينكنز Box – Jenkens .

هدف البحث :

إن هدف البحث يتمثل بالتكهن عن طريق توظيف المكونات الرئيسية المستخلصة من السلاسل الزمنية المتعددة وباستخدام نماذج بوكس – جينكنز ومقارنة نتائج التكهن مع التكهن الخاص بالبيانات الأصلية وباستخدام نماذج بوكس – جينكنز ، لتشخيص مدى كفاءة توظيف أسلوب المكونات الرئيسية في التكهن .

الجانب النظري :

1- المكونات الرئيسية : (PC) Principal Components

إن فكرة المكونات الرئيسية تعود إلى عام 1901 عندما اقترحها Karl – Pearson بوصفها وسيلة لحل مشكلة تعدد العلاقات الخطية أو اعتمادها طريقة استكشافية Exploration فيمكن الاستفادة منها للتوصل إلى تفسير أو فهم العلاقات المتداخلة بين المتغيرات إلا إن الموضوع لم يأخذ شكله الرياضي أو الإحصائي ألا عندما باشر Kendel بحثه عام 1957 حول هذا الموضوع (الجراح ، 2003) .

إن تحليل المكونات الرئيسية مفيد في تبسيط وصف مجموعة متغيرات على علاقة متبادلة اذ تتم معاملة المتغيرات بالتساوي في تحليل المكونات الرئيسية، بعبارة أخرى لا يتم تقسيمها إلى متغيرات معتمدة ومستقلة كما في تحليل الانحدار. إن هذا الأسلوب يمكن اختصاره كطريقة لتحويل المتغيرات الأصلية

Orginal Variables إلى متغيرات جديدة غير مرتبطة تسمى المتغيرات الجديدة بالمكونات الرئيسية Principal Components وكل مكون رئيسي هو عبارة عن توفيق خطي Linear Combination عن المتغيرات الأصلية .

إن مقياس كمية المعلومات المنقولة من خلال كل مكون رئيسي هو تباينه ، ولهذا السبب ترتب المكونات الرئيسية بترتيب تناقص التباين ، لذلك فالمكون الرئيسي الأكثر معلوماتية Most Informative هو الأول ، والأقل معلوماتية هو الأخير (إن المتغير الذي تباينه صفر لن يمكن تمييزه من بين عناصر(أعضاء) المجتمع) (Afifi , 1984) ، ويمكن كتابة المكونات الرئيسية الأساسية Pc_j لمتغيرين (X_1,X_2) كحالة خاصة ، وكل متغير يتكون من N المشاهدات بالشكل الأتي :-

$$\left.\begin{aligned} Pc_1 &= a_{11}\mathbf{X}_1 + a_{12}\mathbf{X}_2 \\ Pc_2 &= a_{21}\mathbf{X}_1 + a_{22}\mathbf{X}_2 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

حيث أن :

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ معاملات تختار بحيث تحقق الشروط الاتية :-

1- تباين Pc_1 اكبر ما يمكن .

2- $a^2_{11} + a^2_{12} = a^2_{21} + a^2_{22} = 1$

3- القيم N لـ Pc_2,Pc_1 غير مرتبطة

وكحالة عامة فان :

$$\left.\begin{aligned} Pc_j &= a_{1j}\mathbf{X}_1 + a_{2j}\mathbf{X}_2 + \ldots + a_{pj}\mathbf{X}_p \\ Pc_j &= \mathbf{X}\mathbf{a}_j \end{aligned}\right\} , j = 1,2, \ldots p \qquad (2)$$

a_j : المتجه المميز j , Pc_j : المكون الرئيسي الذي تسلسله j .

وبشكل عام يمكن كتابة المكون الرئيسي j بالتركيب الخطي الأتي :-

$$Pc_j = \sum_{k=1}^{P} \mathbf{a}_{kj}\mathbf{X}_k \quad , \; j = 1,2, \dots p \qquad (3)$$

a_j تختار بحيث تجعل تباين Pc_j اكبر ما يمكن بتحقيق الشرط التالي :-

$$a_i a_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad (4)$$

(الجراح ، 2003) .

2- النماذج الحركية : Dynamical Models

يبنى النظام الحركي عندما يكون لدينا مخرجات y_t التي تكــون خطيــة بالاعتماد على القيم الحالية والسابقة لمتغير واحد أو أكثر من المتغيرات المســتقلة $(x_{1t},x_{2t,\dots})$ وهذا النظام يفرض إن المشاهدات للسلاسل الزمنية المختلفـــــة تحدث عند فتــرات زمنيـــة فضـــائية متســاوية equally spaced time intervals (Pankratz , 1991) والنظام الحركي تمثله نماذج حركية تسمى نماذج بوكس – جنكنز Box – Jenkins Models وهي (فاندل ، 1992) :

1- نموذج الانحدار الذاتي AR : Autoregressive Model :

يرمز للنموذج بــ (AR) ، والصيغة العامة له :

$$u_t = \varphi_1 u_{t-1} + \varphi_2 u_{t-2} + \cdots + \varphi_P u_{t-P} + a_t \qquad (5)$$

يطلق على هذه العملية عملية انحدار ذاتي من الرتبـــة p ويرمــز لهـــا بـــالرمز AR(p).

حيث ان :

$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_P$: تمثل معلمات النموذج التي تحقق شروط الاستقرارية.

a_t : متغير عشوائي أو ما يسمى بالتشويش Noise نفترض انه يتــوزع توزيعـــا" طبيعيا" بوسط مقداره صفر وتباين σ_a^2 .

2- نموذج المتوسطات المتحركة MA : Moving Average Model :

يرمز للنموذج بـــ (MA) ويُعبر عنه رياضيا" بالشكل الاتـي:

$$u_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \cdots - \theta_q a_{t-q} \qquad (6)$$

$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_q$: معلمات نموذج المتوسطات المتحركة تكون مستقلة بعضـــها عــن البعض الأخر ولها توزيع طبيعي بوسط حسابي صفر وتباين σ_a^2 .

ويسمى هذه النموذج بنموذج المتوسطات المتحركة من الرتبة q ويرمز لـــه بـــــ MA(q) .

3- نموذج الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة

Autoregressive Moving Average Model

الصيغة العامة للنموذج الذي يرمز له بالرمز ARMA(p,q) :

$$u_t = a_t + (\varphi_1+\theta_1)a_{t-1} + \varphi_1(\varphi_1-\theta_1)a_{t-2} + \varphi_1^2(\varphi_1+\theta_1)a_{t-3} + \varphi_1^3(\varphi_1+\theta_1)a_{t-4} + \cdots + \varphi_1^t(\varphi_1+\theta_1)a_0 \qquad (7)$$

θ_i,φ_j : معلمات النموذج .

وقد تم توظيف الطريقة التالية لإيجاد النمـــوذج النهـــائي المعتمـــد فـــي الـــتكهن (Ladalla, 2000) :

$$\mathbf{X}_t \mathbf{P} = \mathbf{W}_t \qquad (8)$$

حيث ان :

$\mathbf{W}_t$: مصفوفة المكونات الرئيسية ذات بعد k*k حيث ان : k = 1,2,...

$\mathbf{X}_t$: مصفوفة لمتغيرات عشوائية ذات بعد k*k وان : k = 1,2,...

P : مصفوفة المتجهات المميزة Matrix of eigen Vectors .

ومن المعادلة (8) يمكن الحصول على البيانات الأصلية X_t :

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{W}_t\mathbf{P}^T \qquad (9)$$

حيث ان :

P^T : مبدلة المصفوفة **P**, **P** Transpose of the matrix .

ولغرض التبسيط ، نفترض انه لدينا النموذج الاتي :

$$W_{j,t} = \varphi_{jt}W_{j,t-1} + a_{j,t} \qquad j = 1,2,...k \qquad (10)$$

حيث ان :

$W_{j,t}$: تتبع نموذجاً حركياً معيناً .

φ_{jt} : معلمة النموذج الحركي المحدد .

$a_{j,t}$: الخطأ العشوائي نفترض انه يتوزع توزيعا" طبيعيا" بوسط حسابي صفر وبتباين مقداره σ_j^2 .

ومن المعادلة (8) و (10) نحصل على :

$$\mathbf{X}_t=\boldsymbol{\varphi}_1\mathbf{X}_{t-1}+\mathbf{a}_t \qquad (11)$$

حيث ان :

φ_1 : تمثل معلمة النموذج وهي على شكل مصفوفة تُمَثَل بالمعادلة الاتية :

$$\boldsymbol{\varphi}_1 = \mathbf{p}\,\boldsymbol{\lambda}_i\,\mathbf{p}^T \qquad (12)$$

وان :

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathrm{diag}\{\varphi_{1,1}\ ,\varphi_{2,1,\ldots,}\varphi_{k,1}\} \qquad (13)$$

وان :

$$\mathbf{a}_t \sim N(0,\boldsymbol{\Sigma})\ ,$$
$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{pDp}^T \qquad (14)$$
$$\mathbf{D} = \mathrm{diag}(\sigma_1^2\ ,\sigma_2^2\ ,\ldots,\sigma_k^2)$$

وبمعرفة النموذج الذي تتبعه السلسلة يمكن التكهن بفترات قادمة ومعرفة مدى كفاءته بالاعتماد على مؤشرات إحصائية يحددها الباحث .

الجانب التطبيقي :

في هذا الجانب اُستخدمت بيانات مجفف الشعر (Ljung , 1999) والية العمل في هذا المجفف،هي تدوير الهواء خلال أنبوبة ،بحيث يسخن في الــداخل وتقــاس درجة حرارة الهواء بواسطة مزدوج حراري Thermocouple عنــد مخــرج الأنبوبة ، ان المدخلات في هذه العملية تمثل القدرة على جهاز التسخين التي هــي عبارة عن شبكة أسلاك مقاومة Resistor Wires ممثلة بنقاط الفولتيــة المطبقــة على السخان والتي تتولد كمتسلسلة عشوائية ثنائية تتحول من مستوى واحــد الــى أخر باحتمال 0.2 ويرمز لها بالرمز x أما المخرجات فتمثل قياسا لدرجة حــرارة بخار الهواء عند مخرج الأنبوبة وتتم المعاينة خلال فترة 0.08 ثانية ويرمز لهــا بالرمز y (حياوي ، 2006) ، ان حجم البيانات المعتمدة في هذا البحــث هــي 505 مشاهدة ،منها 500 مشاهدة استخدمت لبناء النموذج ، و5 مشاهدات استخدمت لمقارنتها مع قيم التكهن التي تم التوصل اليها حسب الطريقة المذكورة أعلاه.

وباعتماد الطريقة المذكورة انفاً في التكهن وُجد بأن :

1- بعد ايجاد المكونات الرئيسية للمتغيرين x,y وُجد ان سلسلة المكون الرئيســي الاول u_t تتبع نموذج AR(1) وحسب المعادلة الاتية اعتمادا" على اليات اســلوب بوكس – جنكنز :

$$u_t = -1.9122 + 0.563\, u_{t-1} + a_t \qquad (15)$$

$$a_t \sim N(0,1.307)$$

2- النموذج المناسب للسلسلة v_t أي المكون الرئيسي الثاني هو AR(5) :

$$v_t = 0.260 + 1.343 v_{t-1} - 0.037 v_{t-2} - 0.440 v_{t-3} - 0.169 v_{t-4} + 0.242 v_{t-5} + b \qquad (16)$$

$$b_t \sim N(0,0.0391)$$

وان معلمات النموذج φ_i تحقق الشرط الاتي :

$$\sum_{i=1}^{5}\varphi_i<1 \qquad (17)$$

4- عند تحديد النموذج المناسب لكل مكون رئيسي على حدة فانه يمكن إعادة كتابة نموذج متعدد متغيرات بالشكل الاتي :

$$\mathbf{W}_t = \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\lambda}_1 \mathbf{W}_{t-1} - \boldsymbol{\lambda}_2 \mathbf{W}_{t-2} - \boldsymbol{\lambda}_3 \mathbf{W}_{t-3} - \boldsymbol{\lambda}_4 \mathbf{W}_{t-4} - \boldsymbol{\lambda}_5 \mathbf{W}_{t-5} + \mathbf{a}_t \qquad (18)$$

حيث ان :

γ : تمثل مصفوفة الثوابت وهي :

$$\boldsymbol{\gamma}^T = (\gamma_1 \ \ \gamma_2)^T = (-1.9122 \quad 0.260)^T \qquad (19)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\lambda_2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\lambda_3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\lambda_4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\lambda_5} \end{pmatrix} \qquad (20)$$

λ : مصفوفة قطرية تمثل معلمات النموذج للمكونات الرئيسية وهي :

$$\boldsymbol{\lambda_1} = \mathrm{diag}\,(0.563 \quad 1.343)$$
$$\boldsymbol{\lambda_2} = \mathrm{diag}\,(0 \quad 0.037)$$
$$\boldsymbol{\lambda_3} = \mathrm{diag}\,(0 \quad 0.44)$$
$$\boldsymbol{\lambda_4} = \mathrm{diag}\,(0 \quad 0.169)$$
$$\boldsymbol{\lambda_5} = \mathrm{diag}\,(0 \quad 0.242)$$
$$a_t \sim N(\mathbf{0} \quad \boldsymbol{\Sigma})$$

حيث ان :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{pDp}^T \qquad (21)$$
$$\mathbf{D} = \mathrm{diag}\,(\sigma_1^2 \ \ \sigma_2^2)$$
$$= \mathrm{diag}\,(1.307 \quad 0.0391)$$

ويمكن كتابة النموذج النهائي من خلال المتغيرات الأصلية بالشكل الاتي :

$$\mathbf{X}_t=\boldsymbol{\delta} +\boldsymbol{\varphi}_1\mathbf{X}_{t-1}+\boldsymbol{\varphi}_2\mathbf{X}_{t-2}+\boldsymbol{\varphi}_3\mathbf{X}_{t-3}+\boldsymbol{\varphi}_4\mathbf{X}_{t-4} + \boldsymbol{\varphi}_2\mathbf{X}_{t-2} + \mathbf{a}_t \qquad (22)$$

وحيث ان :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -0.9935 & -0.1143 \\ -0.1143 & 0.9935 \end{bmatrix} \qquad (23)$$

عليه يمكن الحصول على $\boldsymbol{\varphi}_i$ بالاعتماد على **P** حسب المعادلة (12) وكما ياتي :

$$\boldsymbol{\varphi}_1 = \mathbf{P}\,\boldsymbol{\lambda}_1\,\mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0.6620} & \mathbf{-0.0783} \\ & \mathbf{1.3340} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi}_2 = \mathbf{P}\,\boldsymbol{\lambda}_2\,\mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0.0004} & \mathbf{-0.0034} \\ & \mathbf{0.0296} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varphi}_3 = \mathbf{P}\,\boldsymbol{\lambda}_3\,\mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0.0057} & \mathbf{-0.0499} \\ & \mathbf{0.4343} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi}_4 = \mathbf{P}\,\boldsymbol{\lambda}_4\,\mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0.002} & \mathbf{-0.0192} \\ & \mathbf{0.1668} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varphi}_5 = \mathbf{P}\,\boldsymbol{\lambda}_5\,\mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0.0032} & \mathbf{-0.0275} \\ & \mathbf{0.2388} \end{bmatrix}$$

ومن المعادلة (14) نحصل على $\boldsymbol{\Sigma}$ كالاتي :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1.290 & 0.1439 \\ 0.1439 & 0.0557 \end{bmatrix}$$

ومن المعادلة التالية نحصل على $\boldsymbol{\delta}$ كالاتي :

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{P}\,\boldsymbol{\gamma}^{T} = \begin{bmatrix} 1.8698 \\ 0.4767 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} 1.8698 \\ 0.4767 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.6620 & -0.0783 \\ & 1.3340 \end{bmatrix} \mathbf{X}_{t-1} + \begin{bmatrix} 0.0004 & -0.0034 \\ & 0.0296 \end{bmatrix} \mathbf{X}_{t-2} + \begin{bmatrix} 0.0057 & -0.0499 \\ & 0.4343 \end{bmatrix} \mathbf{X}_{t-3} + \begin{bmatrix} 0.002 & -0.0192 \\ & 0.1668 \end{bmatrix} \mathbf{X}_{t-4} + \begin{bmatrix} 0.0032 & -0.0275 \\ & 0.2388 \end{bmatrix} \mathbf{X}_{t-5} + \begin{bmatrix} \mathbf{a}_t \\ \mathbf{b}_t \end{bmatrix} \qquad (24)$$

مما سبق يصبح النموذج النهائي بالشكل الاتي :

ان النموذج أعـــلاه يمثــل نمـــوذج متعـــدد متغيـــرات حركـــي Multivaraite Dynamical Model. بعد تحويل البيانات الاصلية الى المكونات الرئيسية حسب الطريقة المذكورة انفاً ومـــن خـــلال دالـــةلارتباط الـــذاتي Autocorrelation Function ودالة الارتبـــاط الجزئـــي Partial Autocorrelation Function وُجِدٍ ان السلسلة تتبع نموذج AR(5) ومن هذا النموذج يمكن التكهن لخمس فترات قادمة للمكونات الرئيسية بالنسبة للمخرجات التي تمثل المكون الرئيسي الثـــاني v_t كالاتي مع حدود الثقة العليا والدنيا بمستوى ثقة 95% :

الجدول (1) : نتائج التكهن للمكون الرئيسي الثاني v

period	forecast	lower	upper	actual
501	5.1268	4.7391	5.5146	5.2672
502	4.8749	4.2255	5.5244	4.7262
503	4.7145	3.7702	5.6588	4.4229
504	4.5777	3.3837	5.7717	4.1221
505	4.4953	3.1306	5.86	3.8504

وبالاعتماد على المعادلة (9) ومن خلال دالتي الارتباط الذاتي والارتباط الجزئي وُجِدِ ان السلسلة الاصلية تتبع نموذج AR(3) ومنه يمكن الحصول على نتائج التكهن للقيم الأصلية بالنسبة لــ y :

الجدول (2) : نتائج التكهن للقيم الأصلية لــy

period	forecast	lower	upper	actual
501	5.51	5.31	5.71	5.48
502	5.35	4.88	5.81	5.14
503	5.22	4.48	5.96	4.84
504	5.13	4.14	6.12	4.54
505	5.07	3.88	6.26	4.26

الاستنتاجات :

1- من ملاحظة نتائج التكهن في الجدول (1) وبالاعتماد على المكونات الرئيسية ، ان التكهن كان جيدا" ولاسيما في الفترات الأولى من حيث الاقتراب الكبير لقيم التكهن من القيم الاصلية، وبنفس الوقت تَحقق الشروط الإحصائية أي ضمن حدود الثقة .

2- كذلك من ملاحظة نتائج التكهن في الجدول (2) وبالاعتماد على القيم الأصلية ، ان التكهن كان جيدا" ولاسيما لأول فترتين زمنيتين، وبنفس الوقت تحقق الشروط الإحصائية لجودة التكهن .

3- نستنتج مما ذُكر في النقطتين أعلاه ان أسلوب المكونات الرئيسية قدم إمكانية جيدة في التكهن ومن ثم يمكن الاعتماد عليه في هذا المجال .

التوصيات :

بناء" على النتائج التي حصلنا عليها يمكن ان نوصي بمحاولة تقدير نموذج دالة التحويل Transfer Function Model عن طريق تطبيق أسلوب المكونات الرئيسية التي بينت انها تختصر الكثير من المعالجات والمشاكل التي يمكن ان يواجهها الباحث في التحليل الإحصائي والتي تتطلب الكثير من الوقت والجهد .

المصادر :

1- الجراح ، ريم علي (2003) : " تحليل المكونات الاساسية باستخدام الشبكات العصبية الاصطناعية مع تطبيق " ، اطروحة دكتوراه غير منشورة ، كلية علوم الحاسبات والرياضيات ، جامعة الموصل .

2- حياوي ، هيام عبد المجيد ،(2006): " تشخيص النظم الحركية الخطية التصادفية من خلال علاقتها مع الزمن " ، اطروحة دكتوراه غير منشورة ، كلية علوم الحاسبات والرياضيات ، جامعة الموصل .

3- فاندل ، والتر (1992) : " السلاسل الزمنية من الوجهة التطبيقية ونماذج بوكس – جنكنز " ، تعريب عبد المرضي حامد عزام ، دار المريخ للنشر ، الرياض ، المملكة العربية السعودية .

4- Afifi, A. A and Clart Virginia (1984). "Computer – Aided Multivariate Analysis " .

5- Ladalla, N., Josef (2000). "Multivariate Time Series Analaysis in Principal Components Space", The 32nd Symposium on interface: computing science and statistic, New Orleans, Louisiana .

6- Ljung , L. (1999). "System Identification – Theory for the User " , 2nd . ed. , Prentic Hall , Upper Saddle River , N.J.London , UK .

7- Pankratz , Alan , (1991). "Forecasting with Dynamic Regression Models ", Depaw University , Greencastle , Indiana .