المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (11) 2007
ص ص [153–174]

الانتقال المختصر بين نتائج R-mode وQ-mode في التحليل ألعاملي

مروان عبد العزيز دبدوب*   ذنون يونس الشكرجي**

المستخلص

يطبق أسلوب R–mode في التحليل العاملي عندما يكون عدد المتغيرات m أصغر من عدد الوحدات التجريبية n، أما إذا كان m أكبر من n فيطبق أسلوب Q-mode. وقد تم التوصل إلى طريقة مختصرة للانتقال بين نتائج الأسلوبين في أية مرحلة من التحليل. ومن تلك النتائج: المتجهات المميزة وتحميلات العوامل ومعاملاتها وقيمها.

Shortcut Transformation Between the Results of R-Mode and Q-Mode in Factor Analysis

ABSTRACT

In factor analysis, whenever the number of variables (m) is less than the number of the experimental units (n). The procedure of R-mode should be applied, if (m) exceed (n) the Q-mode is the suitable procedure to follow. A shortcut transformation between the results of the two procedures was established in any analytical step. Some of the results are: eigen vectors, factor loadings, factor coefficients and factor scores.

المقدمة

تعود فكرة التحليل العاملي إلى عام 1904 عندما قدم Spearman نظرية العاملين two factors theory لحساب معاملات الارتباط بين مجموعة من المتغيرات من خلال عامل واحد، وأُرجِعت المعاملات القريبة من الصفر إلى عامل

* أستاذ مساعد– قسم الإحصاء والمعلوماتية/ كلية علوم الحاسبات والرياضيات/ جامعة الموصل
** مدرس مساعد– قسم المصارف/ معهد نينوى التقني/ هيئة التعليم التقني

تاريخ التسلم : 22/ 11/ 2006 ـــــــــ تاريخ القبول : 16/ 1/ 2007

الصدفة. وفي عام 1931 وضع Thurston نظريـــة العوامـــل المتعـــددة multi-factor theory والتي تقوم على أساس معامل الارتباط بـــين المتغيـــرات. كمـــا استخدم Rao في عام 1955 معامل الارتبـــاط المتعـــدد لتقـــدير كميـــة الشـــيوع للمتغيرات. وبذلك وضعت الأسس الأولية للتحليل العاملي[1].

التحليل العاملي هو أسلوب لوصف الظـــواهر وتفســـيرها، وإبـــراز صـــفات المتغيرات وعلاقتها بالظاهرة المدروسة[2]، ويُتَبَعْ التحليل ألعاملي من أجل الحصول على أكبر قدر من المعلومات عن الظاهرة بأقل عدد من العوامل. وأحدى طرائـــق التحليل العاملي هو تحليل المكونات الرئيسة الذي يعمل على تحويل مجموعة مـــن المتغيرات المترابطة إلى مجموعة أصغر من المتغيرات غير المترابطة والمتمثلـــة بتركيبة خطية لمجموعة المتغيرات الأصلية، وهذه التركيبة تحتوي على نسبة كبيرة من المعلومات عن الظاهرة المدروسة[3]،[7].

يطبق تحليل المكونات الرئيسة على مصفوفة التباين والتباين المشترك عنـــدما تكون المتغيرات تمتلك نفس وحدات القياس، وبعكسه يطبق على مصفوفة الارتباط، في حين يُستخدَم في التحليل العاملي نتائج تحليل المكونات الرئيسة المستحصلة من تحليل مصفوفة الارتباط. وقد أشار دبدوب والطالب[4] إلى إمكانية استخدام مصفوفة التباين والتباين المشترك كذلك في التحليل العاملي ولكن تحت قيود معينة تحـــددها طبيعة الدراسة والهدف منها.

هدف البحث:

هنالك عاملان رئيسان يحددان الأسلوب المتبع في التحليل العاملي وهما: عدد المتغيرات وعدد الوحدات التجريبية. إن إتباع أحـــد الأســـلوبين R-mode أو Q-mode يؤدي إلى فقدان معلومات يمكن أن يتوصل إليها الأسلوب الآخر، لذا وضع مقترح للتغلب على هذه المشكلة وهو: التوصل إلى طريقة مختصرة تتيح اســـتخدام نتائج أحد الأسلوبين للحصول على نتائج الأسلوب الآخر، وبذلك يمكن الاســـتفادة من جميع المعلومات المتوافرة عن الظاهرة المدروسة.

تحليل المكونات الرئيسة:

يعد هذا التحليل مرحلة أولية للتحليل ألعاملي. إن تحليل المكونات الرئيسة هو طريقة إحصائية تعمل على تفسير معظم التباين الكلي لظاهرة ما عند احتوائها على عدد m من المتغيرات المترابطة، ويتم ذلك باختيار k من المكونات الرئيسة المتعامدة (k<m) التي توضع متجهاتها المميزة في تراكيب خطية مشتقة من المتغيرات الأصلية[5].

إن تباين كل مكون رئيس هو الجذر المميز المرافق للمتجه المميز، وأن مجموع تباينات المكونات الرئيسة يساوي مجموع الجذور المميزة ويساوي مجموع عناصر قطر المصفوفة التي تم تحليلها، لذا فإن الأهمية النسبية للمكون الرئيس هي نسبة ما يفسره من التباين الكلي وتساوي نسبة قيمة جذره المميز إلى مجموع الجذور المميزة. على هذا الأساس يكون المكون الرئيس الأول أكثر أهمية يليه المكون الثاني، ...إلخ[6].

يعتمد اختيار k من المكونات الرئيسة بالدرجة الأولى على رأي المختص في دراسة الظاهرة ومدى قناعته بنسبة التباين المفسر[6]،[8].

أسلوبا R-mode و Q-mode:

في دراسة تحتوي على m من المتغيرات و n من الوحدات التجريبية (الأفراد)، توضع المشاهدات في مصفوفة تدعى مصفوفة البيانات $\underline{X}=[x_{ij}]$، أعمدتها تحتوي على المتغيرات (j=1,2,..,m) وصفوفها عبارة عن الوحدات التجريبية[7] (i=1,2,..,n).

تحول مصفوفة البيانات $\underline{X}$ إلى المصفوفة $\underline{H}$ كخطوة أولى في مسار تحليل المكونات الرئيسة والتحليل العاملي، حيث أن:

$$\underline{H} = [h_{ij} = (x_{ij} - \bar{x}_{.j}) / (\sum_{i=1}^{n} (x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2)^{1/2}] \qquad \ldots \qquad (1)$$

بالاعتماد على الأكبر والأصغر من m و n يتم تحديد طريقة استخدام المصفوفة $\underline{H}$، كالآتي:

1−عندما تكون n>m يتبع أسلوب R−mode، والذي يحدد التعامل مع مصفوف الارتباط $\underline{R}_{m\times m}$ التي عناصرها معامل الارتباط بين أزواج المتغيرات، حيث أن:

$$\underline{R}_{m\times m} = \underline{H}'\,\underline{H} \quad \ldots \quad (2)$$

بتطبيق تحليل المكونات الرئيسة على المصفوفة $\underline{R}$ نحصل على m من الجذور المميزة الموجبة (λ_j) مرتبة تنازلياً $\lambda_1>\lambda_2>\ldots>\lambda_m$، ترافقها متجهات مميزة $(\underline{a}_j)$ متعامدة، وهذا يعني تحقيق قيدين هما: أن يكون طول كل متجه مميز يساوي واحداً $(\underline{a}'_j\,\underline{a}_j = 1)$، ومجموع حاصل ضرب متجهين مميزين مختلفين يساوي صفراً $(\underline{a}'_j\,\underline{a}_{j'} = 0)$. وتمثل المتجهات المميزة أعمدة المصفوفة $\underline{A} = [\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_m]$[9].

توضع المتجهات المميزة بوصفها عوامل في تركيبة خطية للمتغيرات الأصلية ذات الوحدات القياسية[10] $(z_{ij} = (x_{ij} - \bar{x}_{ij})/s_j)$ لتعطي (pc_{ij}) القيمة i للمكون الرئيس j

$$pc_{ij} = a_{1j}z_{i1} + a_{2j}z_{i2} + \ldots + a_{mj}z_{im} \quad \ldots \quad (3)$$

ويمكن الحصول على متجه $\underline{pc}_j$ يحتوي على n من قيم المكون الرئيس j:

$$\underline{pc}_j = \underline{Z}\,\underline{a}_j \quad \ldots \quad (4)$$

حيث أن $\underline{Z}$ هي المصفوفة القياسية لمصفوفة البيانات $\underline{X}$.

2− عندما تكون n<m: في هذه الحالة يتبع أسلوب Q-mode، الذي يتعامل مع مصفوفة تدعى بمصفوفة الوحدات التجريبية أو الأفراد يرمز لها بـ $\underline{Q}_{n\times n}$، التي يمكن الحصول عليها كالآتي:

$$\underline{Q} = \underline{H}\,\underline{H}' \quad \ldots \quad (5)$$

بتطبيق تحليل المكونات الرئيسة على $\underline{Q}$ نحصل على جذور مميزة موجبة $(\underline{\gamma}_i)$ بعدد n مرتبة تنازلياً $\gamma_1 > \gamma_2 > \ldots > \gamma_n$ ترافقها متجهات مميزة $(\underline{b}_i)$ متعامدة، وهذا يعني تحقيق قيدين هما: أن يكون طول كل متجه مميز يساوي واحداً $(\underline{b}'_j\,\underline{b}_j = 1)$، ومجموع حاصل ضرب متجهين مميزين مختلفين يساوي صفراً $(\underline{b}'_j\,\underline{b}_{j'} = 0)$. وتمثل المتجهات المميزة أعمدة المصفوفة $\underline{B} = [\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n]$[9].

يمكن الحصول على (pc_{ji}) القيمة j للمكون الرئيس i:

$$pc_{ji} = b_{1i}z_{1j}+b_{2i}z_{2j}+\ldots+b_{ni}z_{nj} \qquad \ldots \quad (6)$$

ويمكن الحصول على n من المتجهات ($\underline{pc}_i$) كلٌ منها يحتوي على m من القيم، حيث أن:

$$\underline{pc}_i = \underline{Z}'\underline{b}_i \qquad \ldots \quad (7)$$

حيث أن: $\underline{Z}$ هي المصفوفة القياسية لمصفوفة البيانات $\underline{X}$، عناصرها z_{ij}.

إذا ما اجري تحليل المكونات الرئيسة على مصفوفة من درجة m×m أو n×n أيهما اكبر، نحصل على مصفوفة من النوع شبه أكيد الايجابية positive semi-definite والتي تعطي جذوراً مميزة موجبة عددها يساوي العدد الأصغر من m أو n، لتكون بقية الجذور المميزة (وهي الفرق بين m و n) تساوي أصفاراً.

إن أسلوب R-mode هو الأكثر إتباعاً، بل قد يكون الأسلوب الوحيد عند أغلب الباحثين الذين يسعون لجعل n>m، وتأتي الأفضلية لهذا الأسلوب لأمرين: الأمر الأول: التعامل المباشر مع مصفوفة الارتباط الناتجة من المعادلة (2)، ويتولى الحاسوب العمليات الإحصائية كافة من بعد إدخال البيانات الأولية حتى إعطاء النتائج النهائية، الأمر الآخر: الحصول على قيم للمكونات الرئيسة بعدد n وهو نفس عدد الوحدات التجريبية التي منها يتم الحصول على معلومات تتيح للباحث إجراء تحاليل إحصائية تكميلية مثل: تحليل الانحدار، تحليل التباين، اختبار الفرضيات،...الخ.

إن عزوف بعض الباحثين عن إتباع أسلوب Q-mode يكمن في أمرين: الأمر الأول: إن المصفوفة $\underline{Q}$ الناتجة من المعادلة (5) ليست بمصفوفة ارتباط ولا هي مصفوفة تباين وتباين مشترك، لذا تعجز البرمجيات الجاهزة من التطبيق المباشر لتحليل المكونات الرئيسة والتحليل العاملي عليها، ولتحليل مثل هذه المصفوفة بعيداً عن البرامج الجاهزة وجب المرور بالعديد عن مراحل منفصلة للتحاليل الإحصائية، الأمر الثاني: حتى يتيح لنا هذا الأسلوب من إجراء تحاليل إحصائية تكميلية وجب توافر معلومات عن المتغيرات، وهذا ليس بالأمر السهل.

الانتقال المختصر بين R-mode وQ-mode:

يتبع أحد الأسلوبين R-mode أو Q-mode حسب واقع العلاقة المشار إليهـا بين m وn. نشير في أدناه إلى طرائق مقترحة بوساطتها يمكن الانتقال المختصـر بين نتائج الأسلوبين وكيفية الاستفادة من النتائج التحليليـة لأحـد الأسـاليب فـي الحصول على نتائج تحليلية للأسلوب الآخر.

إن كلاً من المصفوفتين $\underline{R}$ و $\underline{Q}$ لها نفس مجموع عناصر القطر[1]،[6]، أي أن:

$$\mathrm{tr}(\underline{R}) = \mathrm{tr}(\underline{Q}) \qquad \ldots \qquad (8)$$

من العلاقة بين مجموع عناصر القطر والجذور المميزة نحصل على:

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i = \mathrm{tr}(\underline{R}) = \mathrm{tr}(\underline{Q}) \qquad \ldots \qquad (9)$$

من المعادلة (9) يتبين تساوي مجموع ما يفسره كل أسلوب من التباين الكلي ، وان كل مكون يفسر جزءاً من هذا التباين حسب الجذر المميز التابع له.

إن المعادلة المميزة[9] characteristic equation للأسلوب R-mode، هي:

$$\underline{R}\,\underline{a}_j = \lambda_j\,\underline{a}_j \qquad \ldots \qquad (10)$$

حيث أن: λ_j هو الجذر المميز j المرافق للمتجه المميز $\underline{a}_j$. ووفق المعادلة (2) تصبح المعادلة (10):

$$\underline{H}'\underline{H}\,\underline{a}_j = \lambda_j\,\underline{a}_j \qquad \ldots \qquad (11)$$

وبضرب مسبق للطرفين بالمصفوفة $\underline{H}$، وحيث أن λ_j عدد ثابت، تصبح المعادلة (11):

$$\underline{H}\,\underline{H}'\underline{H}\,\underline{a}_j = \lambda_j\,\underline{H}\,\underline{a}_j \qquad \ldots \qquad (12)$$

وفق المعادلة (5) يعوض في المعادلة (12) عن $\underline{H}\,\underline{H}'$ بالمصفوفة $\underline{Q}$:

$$\underline{Q}\,\underline{H}\,\underline{a}_j = \lambda_j\,\underline{H}\,\underline{a}_j \qquad \ldots \qquad (13)$$

تشير المعادلة (13) إلى معادلة مميزة متكونة من مصفوفة $\underline{Q}$ جذورها المميـزة هي λ_j ومتجهاتها المميزة هي $\underline{H}\,\underline{a}_j$، ولكن الجذور المميـزة لـــِ $\underline{Q}$ هـي γ_i ومتجهاتها المميزة هي $\underline{b}_i$، وبذلك يستنتج أن:

$$\gamma_i = \lambda_j \;\&\; \underline{b}_i = \underline{H}\,\underline{a}_j \qquad \ldots \qquad (14)$$

إن المعادلة المميزة لأسلوب Q-mode، هي:

$$\underline{Q}\,\underline{b}_i = \gamma_i\,\underline{b}_i \qquad \ldots \qquad (15)$$

حيث أن: γ_i هو الجذر المميز i المرافق للمتجه المميز $\underline{b}_i$. ووفق المعادلة (5) تعوض في المعادلة (15) عن المصفوفة $\underline{Q}$ بـ $\underline{H}\,\underline{H}'$:

$$\underline{H}\,\underline{H}'\underline{b}_i = \gamma_i\,\underline{b}_i \qquad \ldots \qquad (16)$$

وبالضرب المسبق لطرفي المعادلة (16) بالمصفوفة $\underline{H}'$، وحيث أن γ_i عدد ثابت، ينتج:

$$\underline{H}'\underline{H}\,\underline{H}'\underline{b}_i = \gamma_i\,\underline{H}'\underline{b}_i \qquad \ldots \qquad (17)$$

ووفق المعادلة (2) يعوض في المعادلة (17) عن $\underline{H}'\underline{H}$ بالمصفوفة $\underline{R}$:

$$\underline{R}\,\underline{H}'\underline{b}_i = \gamma_i\,\underline{H}'\underline{b}_i \qquad \ldots \qquad (18)$$

المعادلة (18) هي معادلة مميزة لها جذور مميزة γ_i ومتجهات مميزة $\underline{H}'\underline{b}_i$ ناتجة من تحليل المصفوفة $\underline{R}$، ولكن $\underline{R}$ لها جذور مميزة هي λ_j ومتجهات مميزة هي $\underline{a}_j$ ، وبذلك يستنتج أن:

$$\lambda_j = \gamma_i \;\&\; \underline{a}_j = \underline{H}'\underline{b}_i \qquad \ldots \qquad (19)$$

وفق ما أشارت إليه المعادلات (8 حتى 19)، تم التوصل إلى ثلاثة استنتاجات:

أولا: أن الجذور المميزة لأسلوب R-mode هي نفسها الجذور المميزة للأسلوب Q-mode أي $\gamma_i = \lambda_j$، وعدد الجذور المميزة غير المساوية للصفر يساوي عدد m أو n أيهما اصغر، وهذا يعني تساوي عدد العوامل المختارة في كلا الأسلوبين R-mode وQ-mode.

ثانياً: إمكانية الانتقال المختصر بنتائج تحليل R-mode إلى نتائج تحليلية لـ Q-mode وبالعكس، فمن العلاقة في المعادلة (14) يمكن الحصول على المتجهات المميزة $\underline{b}_i$ للمصفوفة $\underline{Q}$ باستخدام المتجهات المميزة $\underline{a}_j$ للمصفوفة $\underline{R}$، ويستعان بالمعادلة (19) للحصول على المتجهات المميزة للمصفوفة $\underline{R}$ من نتائج تحليل المصفوفة $\underline{Q}$.

ثالثاً: إن الانتقال المختصر في (14) و(19) يجعل طول كل متجـــة مميـــز فـــي الأسلوبين R-mode وQ-mode يساوي الجذر المميز المرافق له، وحتى يتحقـــق قيدي تعامد المتجهات المميزة، عليه وجب أن يكون طول المتجهات المميزة التـــي تعطيها المعادلتان (14 و19) يساوي واحد. ويتم ذلك كالآتي:

تحول المعادلة (14) إلى المعادلة (20):

$$\underline{b}_i = \underline{H}\ \underline{a}_j\ (1/\sqrt{\lambda_j}\ ) \qquad \ldots \quad (20)$$

تحول المعادلة (19) إلى المعادلة (21):

$$\underline{a}_j = \underline{H}'\underline{b}_i\ (1/\sqrt{\lambda_j}\ ) \qquad \ldots \quad (21)$$

وللتحقق من الحصول على المعادلة المميزة (10) التي طول المتجه المميـــز فيها $\underline{a}_j$ يساوي واحد، تعوض المعادلة (20) في المعادلة (21):

$$\underline{a}_j = \underline{H}'\big(\underline{H}\ \underline{a}_j\ (1/\sqrt{\lambda_j}\ )\big)(1/\sqrt{\lambda_j}\ ) \qquad \ldots \quad (22)$$

$$\underline{a}_j = \underline{H}'\underline{H}\ \underline{a}_j\ (1/\lambda_j) \rightarrow\ \underline{a}_j\ \lambda_j = \underline{H}'\underline{H}\ \underline{a}_j\ \rightarrow\ \underline{a}_j\ \lambda_j = \underline{R}\ \underline{a}_j\ \ldots(23)$$

إن المعادلة (23) تشير إلى المعادلة (10) التي فيها طول المتجه المميـــز $\underline{a}_j$ يساوي واحد. وللتحقق من الحصول على المعادلة المميـــزة (15) يـــتم تعـــويض المعادلة (21) في المعادلة (20) وتبسط المعادلة بنفس الفكرة السابقة. وهكذا وجب استخدام المعادلتين (20) و(21) بدلاً من (14) و(19) على التوالي.

التحليل العاملي:

يهدف التحليل العاملي إلى إيجاد مجموعة من العوامل factors التـــي تكـــون مسؤولة عن توليد الاختلافات في مجموعة من المتغيرات، يمكن التعبير عن هذه المتغيرات كدالة لعدد من العوامل. وتكمن مرونة التحليل العاملي في أنه لا يتطلب فرضيات حول طبيعة المتغيرات أو الوحدات التجريبية، لهذا يســـتخدمه البـــاحثون على نطاق واسع لتحليل عدد كبير من المتغيرات وإرجاعها إلى عـــدد أقـــل مـــن العوامل التي تفسر معظم الاختلافات الموجودة في البيانات وتعطي النموذج الملائم لظواهر متعدد المتغيرات.

النموذج العاملي عبارة عن دالة خطية لـــ m من المتغيرات[3]، وهي:

$$X_j = p_{1j} F_1 + p_{2j} F_2 + \ldots + p_{kj} F_k + U_j \qquad \ldots \quad (24)$$

F_1،F_2،…،F_k: العوامل المشتركة المختارة من بين m من العوامل.

P_{tj}: تحميلات العامل F_t في التركيب الخطي لـِ X_j، حيث أن: $t=1,2,\ldots,k$.

U_j : تباين العامل في المتغير j.

هنالك ثلاث نتائج مهمة يعطيها التحليل العاملي هي: تحميلات العوامل factor loadings ($p_{jj'}$) ومعاملات العوامل factor coefficients ($Fc_{jj'}$) وقيم العوامل factor scores (F_j-sc). وان كلاً من هذه النتائج لها حســـاباتها واســـتخداماتها. سنسعى الى تحقيقها من خلال الانتقال المختصر بين نتائج R-mode وQ-mode.

1- تحميل العامل 'j في المتغير j: هو عبارة عن معامل الارتباط البسيط بين قيم المتغير j وقيم المكون الرئيس 'j، حيث أن: $j, j' = 1,2,\ldots,m$، وقد يستخدم العمود j في المصفوفة $\underline{H}$ بدلا من المتغير j.

$$p_{jj'} = \mathrm{r}(\underline{x}_j, \underline{pc}_{j'}) = \mathrm{r}(\underline{h}_j, \underline{pc}_{j'}) \qquad \ldots \quad (25)$$

ويتم أيضاً إيجاد متجه تحميلات العوامل ($\underline{p}_j$) في أسلوب R-mode، كالآتي:

$$\underline{p}_j = \underline{a}_j \sqrt{\lambda_j} = \qquad \ldots \quad (26)$$

ويتم إيجاد متجه تحميلات العوامل ($\underline{w}_i$) في أسلوب Q-mode، كالآتي:

$$\underline{w}_i = \underline{b}_i \sqrt{\lambda_j} \qquad \ldots \quad (27)$$

إن ألانتقال المختصر بين تحميلات العوامل بين الأسلوبين يمكن التوصل إليه كالآتي:

يضرب طرفا المعادلة (26) بالمصفوفة $\underline{H}$:

$$\underline{H}\,\underline{p}_j = \underline{H}\,\underline{a}_j \sqrt{\lambda_j} = (\underline{H}\,\underline{a}_j\,(1/\sqrt{\lambda_j}))\,\lambda_j \qquad \ldots \quad (28)$$

ووفق المعادلة (20) تصبح المعادلة (28):

$$\underline{H}\,\underline{p}_j = \underline{b}_i\,\lambda_j \qquad \ldots \quad (29)$$

بقسمة طرفي المعادلة (29) على $\sqrt{\lambda_j}$:

$$\underline{H}\ \underline{p}_{\mathrm{j}}\,(1/\sqrt{\lambda_j}\,) = \underline{b}_i\,\sqrt{\lambda_j} \qquad \ldots \qquad (30)$$

ووفق المعادلة (27) تصبح المعادلة (30) كالآتي:

$$\underline{w}_{\ i} = \underline{H}\ \underline{p}_{\mathrm{j}}\,(1/\sqrt{\lambda_j}\,) \qquad \ldots \qquad (31)$$

توضح المعادلة (31) كيفية الحصول على متجه تحميلات العوامل لأسلوب Q-mode من خلال استخدام تحميلات العوامل لأسلوب R-mode.

للحصول على تحميلات العوامل لأسلوب R-mode من خلال استخدام تحميلات العوامل لأسلوب Q-mode، يتبع الآتي:

يضرب طرفا المعادلة (27) بالمصفوفة $\underline{H}'$:

$$\underline{H}'\,\underline{w}_{\ i} = \underline{H}'\underline{b}_i\,\sqrt{\lambda_j} = (\underline{H}'\underline{b}_i\,(1/\sqrt{\lambda_j}\,))\lambda_j \qquad \ldots \qquad (32)$$

ووفق المعادلة (21) تصبح المعادلة (32)، كالآتي:

$$\underline{H}'\,\underline{w}_{\mathrm{i}} = \underline{a}_j\,\lambda_j \qquad \ldots \qquad (33)$$

بقسمة طرفي المعادلة (33) على $\sqrt{\lambda_j}$:

$$\underline{H}'\,\underline{w}_{\mathrm{i}}(1/\sqrt{\lambda_j}\,) = \underline{a}_j\,\sqrt{\lambda_j} \qquad \ldots \qquad (34)$$

ووفق المعادلة (26) نحصل من المعادلة (34) على متجه تحميلات العوامل ($\underline{p}_{\ j}$):

$$\underline{p}_{\ j} = \underline{H}'\,\underline{w}_{\mathrm{i}}\,(1/\sqrt{\lambda_j}\,) \qquad \ldots \qquad (35)$$

وهكذا يمكن بطريقة مختصرة إيجاد تحميلات العوامل لأسلوب Q-mode من النتائج التحليلية لأسلوب R-mode (المعادلة 31)، وبالعكس من المعادلة (35).

2-معاملات العوامل: وهو عبارة عن نسبة بين تحميل العامل وجذره المميز. فمعاملات العوامل ($Fc_{j(R)}$) لأسلوب R-mode يتم الحصول عليها كالآتي:

$$Fc_{j(R)} = \underline{p}_{\ j}\,(1/\,\lambda_j\,) \qquad \ldots \qquad (36)$$

وفق المعادلة (26) تصبح المعادلة (36) كالآتي:

$$Fc_{j(R)} = \underline{a}_j \,(1/\sqrt{\lambda_j}\,) \qquad \ldots \quad (37)$$

ووفق المعادلة (21) تصبح المعادلة (37) كالآتي:

$$Fc_{j(R)} = \underline{H}'\underline{b}_i \,(1/\lambda_j) \qquad \ldots \quad (38)$$

ووفق المعادلة (32) تصبح المعادلة (38) كالآتي:

$$Fc_{j(R)} = \underline{H}'\underline{w}_i \,(1/\,(\lambda_j\sqrt{\lambda_j}\,)) \qquad \ldots \quad (39)$$

إن المعادلتين (38 و39) تعطيان معـــاملات العوامـــل لأســـلوب R-mode باستخدام المتجهات المميزة أو تحميلات العوامل لأسلوب Q-mode على التوالي.

بالنسبة لأسلوب Q-mode فإن معاملات العوامل ($Fc_{i(Q)}$) يتم الحصول عليها كالآتي:

$$Fc_{i(Q)} = \underline{w}_i (1/\,\lambda_j\,) \qquad \ldots \quad (40)$$

وفق المعادلة (27) تصبح المعادلة (40) كالآتي:

$$Fc_{i(Q)} = \underline{b}_i \,(1/\sqrt{\lambda_j}\,) \qquad \ldots \quad (41)$$

ووفق المعادلة (20) تصبح المعادلة (41) كالآتي:

$$Fc_{i(Q)} = \underline{H}\ \underline{a}_j \,(1/\lambda_j) \qquad \ldots \quad (42)$$

ووفق المعادلة (28) تصبح المعادلة (42) كالآتي:

$$Fc_{i(Q)} = \underline{H}\ \underline{p}_j (1/(\lambda_j\sqrt{\lambda_j}\,)) \qquad \ldots \quad (43)$$

من خلال المعادلتين (42 و43) يتم الحصول على معاملات العوامل لأسلوب Q-modeمن خلال المتجهات المميزة أو تحميلات العوامل لأسلوب R-mode.

3- قيم العوامل: وهي عبارة عن قسمة قيم المكون الرئيس على جذره المميز. إن ألانتقال المختصر بين قيم العوامل بين الأســـلوبين R-mode وQ-mode، يـــتم كالآتي:

عند إتباع أسلوب R-mode تحسب قيم العوامل ($F_{j(R)\text{-}sc}$)، كالآتي:

$$F_{j(R)\text{-}sc} = pc_j (1/\lambda_j) \qquad \ldots \quad (44)$$

وفق المعادلة (4) تصبح المعادلة (44)، كالآتي:

$$F_{j(R)\text{-sc}} = \underline{Z}\, \underline{a}_j\ (1/\lambda_j) \qquad \ldots \quad (45)$$

ووفق المعادلة (19) تصبح المعادلة (45)، كالآتي:

$$F_{j(R)\text{-sc}} = \underline{Z}\, \underline{H}'\underline{b}_i\ (1/\lambda_j) \qquad \ldots \quad (46)$$

ووفق المعادلة (27) تصبح المعادلة (46)، كالآتي:

$$F_{j(R)\text{-sc}} = \underline{Z}\, \underline{H}'\underline{w}_i\ (1/\ \lambda_j \sqrt{\lambda_j}\ ) \qquad \ldots \quad (47)$$

تتيح المعادلتان (46 و47) الحصول على قيم عوامل الأسلوب R-mode من النتائج التحليلية لأسلوب Q-mode.

بالنسبة لقيم العوامل في الأسلوب Q-mode، يتم إيجادها كالآتي:

$$F_{i(Q)\text{-sc}} = pc_i (1/\lambda_i) \qquad \ldots \quad (48)$$

وفق المعادلة (7) تصبح المعادلة (48) كالآتي:

$$F_{i(Q)\text{-sc}} = \underline{Z}'\underline{b}_i\ (1/\lambda_j) \qquad \ldots \quad (49)$$

ووفق المعادلة (14) تصبح المعادلة (49) كالآتي:

$$F_{i(Q)\text{-sc}} = \underline{Z}'\underline{H}\ \underline{a}_j\ (1/\lambda_j) \qquad \ldots \quad (50)$$

ووفق المعادلة (26) تصبح المعادلة (50) كالآتي:

$$F_{i(Q)\text{-sc}} = \underline{Z}'\underline{H}\ \underline{p}_j\ \ (1/\lambda_j \sqrt{\lambda_j}) \qquad \ldots \quad (51)$$

إن المعادلتين (50 و51) تتيحان الحصول على قيم العوامل لأسلوب Q-mode من النتائج التحليلية لأسلوب R-mode.

تطبيقات:

أجرى الشكرجي[1] دراسة لتأثير عشرة متغيرات في نسبة خلايا سرطان الدم الحاد (Leukemia)، وقد استخدم في ذلك 54 مريضاً. لتبسيط إجــراء التحاليــل الإحصائية للطرائق المقترحة في هذا البحث وملاءمة عرض نتائجها، فقد أخــذت من تلك الدراسة ستة متغيرات سجلت بياناتها من عشرة مرضى (وحدات تجريبية)، ويبين الجدول (1) البيانات الأولية.

الجدول 1: البيانات الأولية لستة متغيرات وعشر وحدات تجريبية.

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
20.0000	9.3000	29.0000	20.0000	15.0000	13.0000
4.0000	6.8000	20.0000	11.0000	9.0000	70.5000
8.0000	5.9000	20.0000	2.0000	35.0000	140.0000
4.0000	7.5000	27.0000	56.0000	24.0000	4.4000
36.0000	11.7000	33.0000	45.0000	141.0000	5.0000
1.0000	7.3000	25.0000	22.0000	10.0000	180.0000
1.5000	6.0000	20.0000	26.0000	50.0000	104.0000
3.0000	4.0000	24.0000	95.0000	28.0000	3.2000
18.0000	7.3000	24.0000	11.0000	15.0000	14.3000
1.6000	3.0000	25.0000	80.0000	55.0000	41.4000

وفق المعادلة (1) تم إيجاد مصفوفة $\underline{H}_{10\times6}$ ويشير الجدول (2) إلى عناصرها.

الجدول 2: عناصر مصفوفة $\underline{H}_{10\times6}$.

0.29854	0.32656	0.33984	-0.17859	-0.19587	-0.23258
-0.16566	-0.01080	-0.371454	-0.27426	-0.24652	0.06727
-0.04961	-0.13225	-0.371454	-0.36993	-0.02702	0.42969
-0.16566	0.08367	0.181774	0.20410	-0.11988	-0.27742
0.76275	0.65043	0.65597	0.08717	0.86789	-0.27429
-0.25270	0.05668	0.02371	-0.15733	-0.23810	0.63828
-0.23820	-0.11875	-0.37145	-0.11481	0.09962	0.24196
-0.19468	-0.38864	-0.05532	0.61867	-0.08611	-0.28368
0.24052	0.05668	-0.05532	-0.27426	-0.19587	-0.22580
-0.23530	-0.52358	0.02371	0.45922	0.14183	-0.08448

وفق المعادلة (2) تم إيجاد المصفوفة $\underline{R}_{6\times6}$، وهي عبارة عن مصفوفة الارتباط بين المتغيرات، ويشير الجدول (3) إلى عناصرها.

الجدول 3: مصفوفة $\underline{R}_{6\times6}$، مصفوفة الارتباط بين المتغيرات.

1.00000	0.81455	0.72603	-0.18421	0.63828	-0.46330
0.81455	1.00000	0.65738	-0.42437	0.41953	-0.18600
0.72603	0.65738	1.00000	0.30362	0.55888	-0.54255
-0.18421	-0.42437	0.30362	1.00000	0.25536	-0.49697
0.63828	0.41953	0.55888	0.25536	1.00000	-0.25862
-0.46330	-0.18600	-0.54255	-0.49697	-0.25862	1.00000

وفق المعادلة (5) تم إيجاد المصفوفة $\underline{Q}_{10\times10}$، ويشير الجدول (4) إلى عناصرها.

الجدول 4: عناصر المصفوف $\underline{Q}_{10\times10}$.

0.43561	-0.09760	-0.21281	0.09119	0.5413
-0.09760	0.30605	0.28464	-0.08606	-0.6334
-0.21281	0.28464	0.48014	-0.26183	-0.5411
0.09119	-0.08606	-0.26183	0.20048	0.0371
0.54128	-0.63335	-0.54107	0.03714	2.2712
-0.12260	0.17722	0.33513	-0.12973	-0.5358
-0.29141	0.20192	0.30924	-0.14050	-0.4925
-0.23148	-0.11053	-0.26683	0.20497	-0.3806
0.21137	0.08841	0.01085	-0.01501	0.0521
-0.32331	-0.13077	-0.13790	0.09964	-0.3182

-0.12260	-0.29141	-0.23148	0.21137	-0.32331
0.17722	0.20192	-0.11053	0.08841	-0.13077
0.33513	0.30924	-0.26683	0.01085	-0.13790
-0.12973	-0.14050	0.20497	-0.01501	0.09964
-0.53575	-0.49250	-0.38056	0.05207	-0.31817
0.55647	0.19344	-0.23204	-0.11322	-0.12959
0.19344	0.29047	-0.03517	-0.08613	0.05038
-0.23204	-0.03517	0.66265	-0.15454	0.54384
-0.11322	-0.08613	-0.15454	0.22869	-0.22223
-0.12959	0.05038	0.54384	-0.22223	0.56820

أعطى تحليل المصفوفة $\underline{R}_{6\times6}$ (الجدول 3)، الجذور المميـــزة λ_j (الجـــدول 5) والمتجهات المميزة $\underline{a}_j$ (الجدول 6).

الجدول 5: الجذور المميزة λ_j الناتجة من تحليل المصفوفة $\underline{R}_{6\times6}$.

3.18267	1.66380	0.67957	0.35437	0.09436	0.02518

الجدول 6: المتجهات المميزة $\underline{a}_j$ الناتجة من تحليل المصفوفة $\underline{R}_{6\times6}$.

-0.51735	0.20647	-0.05966	-0.31372	-0.60260	-0.47393
-0.43946	0.42900	-0.13571	0.25434	0.65965	-0.32341
-0.50249	-0.12441	-0.06969	0.65849	-0.30130	0.45031
-0.06545	-0.74895	0.16979	0.26227	0.09655	-0.57259
-0.41187	-0.09232	0.76571	-0.34204	0.20913	0.27349
0.33587	0.43406	0.59835	0.46638	-0.24060	-0.25567

أعطى تحليل المصفوفة $\underline{Q}_{10\times10}$ (الجدول 4)، الجذور المميزة γ_i (الجدول 7) والمتجهات المميزة $\underline{b}_i$ (الجدول 8).

الجدول 7: الجذور المميزة γ_i الناتجة من تحليل المصفوفة $\underline{Q}_{10\times10}$.

3.18267	1.66380	0.67957	0.35437	0.09436
0.02518	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

الجدول 8: المتجهات المميزة $\underline{b}_i$ الناتجة من تحليل المصفوفة $\underline{Q}_{10\times10}$.

-0.25476	0.163076	0.49162	-0.20975	0.22504
0.23497	0.20524	0.19148	0.25467	-0.35942
0.25230	0.34523	-0.26736	0.25206	0.29353
-0.05581	0.21951	0.28783	-0.26559	-0.52617
-0.82138	0.07011	-0.40729	0.07365	-0.09014
0.23354	0.29929	-0.21670	-0.75116	0.11728
0.22972	0.09916	-0.31270	0.25435	-0.41883
0.11155	-0.60360	0.07572	0.02483	0.04038
-0.05536	0.15996	0.42437	0.34893	0.33856
0.12504	-0.51930	-0.26623	0.01882	0.37896

0.08874	0.07386	-0.65792	0.12309	0.33294
-0.08098	0.22951	0.26010	-0.11918	0.72862
-0.04046	-0.04230	-0.34646	-0.68670	-0.03147
0.34408	-0.31788	-0.05023	-0.53638	-0.09398
-0.11896	-0.16310	0.05572	-0.14319	0.27680
-0.16452	-0.33474	0.17216	0.02713	0.24787
0.09545	-0.45953	-0.44868	0.41624	0.06826
-0.70729	-0.19684	-0.19128	-0.12248	0.15704
0.02499	-0.66852	0.32461	0.04307	0.01084
0.56068	-0.05966	0.03048	-0.00682	0.42539

يلاحظ أن الجذور المميزة التي أعطاها أسلوب R-mode (الجدول 5) وعددها ستة، قد تساوت قيمها مع الجذور المميزة غير الصفرية التي أعطاها أسلوب Q-mode (الجدول 7)، أي أن: $\gamma_i=\lambda_j$. وقد تم الحصول على ستة جذور مميزة غير صفرية وفقاً للعدد الأصغر من m وn، حيث أن: m=6 وn=10، وبقية الجذور المميزة (وهي الفرق بين m وn) تساوي أصفاراً، وذلك لأن مصفوفة $\underline{Q}_{10\times10}$ من النوع شبه أكيد الايجابية positive semi-definite.

من المتجهات المميزة $\underline{a}_j$ التي أعطاها تحليل المصفوفة $\underline{R}_{6\times6}$ (الجدول 6)، ومن المتجهات المميزة $\underline{b}_i$ التي أعطاها تحليل المصفوفة $\underline{Q}_{10\times10}$ (الجدول 8)، وبالاستعانة بالمصفوفة $\underline{H}_{10\times6}$ (الجدول 2)، قد تم التحقق مما أشـــارت إليه المعادلتان (20 و21) حـــول الانتقال المختصر بين نتائج تحليل الأسلوبين R-mode و Q-mode.

إن أسلوب Q-mode قد أعطى عشرة جذور مميزة، قيم أربعة منها تساوي الصفر (الجدول 7)، لذا فإن كل عملية إحصائية تدخل في حساباتها الجذور المميزة هذه سينتج عنها أربعة متجهات صفرية، علية سنستخدم الجذور المميزة غير الصفرية (الجدول (5) بدلاً من الجدول (7))، كما سنشير إلى المتجهات الستة غير الصفرية التي ستنتج من خلال العمليات الإحصائية عند تطبيق أيٍ من المعادلات (26) وحتى (51).

والآن لنطبق الانتقال المختصر بين نتائج الأسلوبين فيما يخص متجهات التحميلات ومعاملات العوامل وقيمها.

1− تحميلات العوامل factor loadings:

يشير الجدول (9) إلى تحميلات العوامل $\underline{p}_j$ لأسلوب R-mode والناتجة من التطبيق المباشر للتحليل ألعاملي باستخدام المعادلة (26). وقد تم الحصول على نفس النتائج عند استخدام الانتقال المختصر الذي تشير إليه المعادلة (34) والاستعانة بالجداول (2 و5 و10).

الجدول 9: متجهات تحميلات العوامل لأسلوب R-mode ($\underline{p}_j$).

-0.92296	0.26632	-0.04919	-0.18676	-0.18511	-0.07520
-0.78401	0.55335	-0.11187	0.15140	0.20264	-0.05132
-0.89645	-0.16047	-0.05745	0.39199	-0.09256	0.07145
-0.11677	-0.96606	0.13997	0.15613	0.02966	-0.09085
-0.73478	-0.11908	0.63123	-0.20361	0.06424	0.04340
0.59919	0.55989	0.49326	0.27763	-0.07391	-0.04057

يشير الجدول (10) إلى تحميلات العوامل $\underline{w}_i$ الناتجة من التطبيق المباشر لأسلوب Q-mode باستخدام المعادلة (27). وقد تم الحصول على نفس عناصر

الجدول (10) عند تطبيق طريقة الانتقال المختصر الذي تشير إليه المعادلة (31) والاستعانة بالجداول (2 و5 و9).

الجدول 10: متجهات تحميلات العوامل لأسلوب Q-mode ($\underline{w}_i$).

-0.45449	0.21034	0.40527	-0.12486	0.06913	0.01408
0.41918	0.26474	0.15785	0.15160	-0.11041	-0.01285
0.45009	0.44530	-0.22040	0.15005	0.09017	-0.00642
-0.09956	-0.28314	0.23727	-0.15810	-0.16163	0.05459
-1.46535	0.09044	-0.33575	0.04385	-0.02769	-0.01888
0.41664	0.38605	-0.17864	-0.44716	0.03602	-0.02611
0.40982	0.12790	-0.25777	0.15141	-0.12866	0.01515
0.19900	-0.77858	0.06242	0.01478	0.01240	-0.11223
-0.09876	0.20633	0.34984	0.20771	0.10400	0.00396
0.22307	-0.66984	-0.21947	0.01121	0.11641	0.08897

2- معاملات العوامل factor coefficients:

عند إتباع التحليل المباشر لأسلوب R-mode وذلك بتطبيق أيةٍ من المعادلتين (36، 37)، فقد تم الحصول على معاملات العوامل $Fc_{j(R)}$ التي يشير إليها الجدول (11). كما تم الحصول على نفس محتوى الجدول (11) عند إتباع الانتقال المختصر الذي تشير إليه المعادلتان (38 و39) والاستعانة بالجداول (2 و5 و8) والجداول (2 و5 و10) على التوالي.

الجدول 11: معاملات العوامل لأسلوب R-mode ($Fc_{j(R)}$).

-0.28999	0.16007	-0.07238	-0.52701	-1.96169	-2.98682
-0.24633	0.33258	-0.16462	0.42724	2.14742	-2.03818
-0.28166	-0.09645	-0.08453	1.10616	-0.98085	2.83798
-0.03669	-0.58063	0.20597	0.44058	0.31431	-3.60857
-0.23087	-0.07157	0.92885	-0.57458	0.68081	1.72359
0.18826	0.33651	0.72583	0.78344	-0.78323	-1.61128

تم الحصول على معاملات العوامل $Fc_{i(Q)}$ لأسلوب Q-mode بالطريقة المباشرة (الجدول 12) وذلك بتطبيق أيةٍ من المعادلتين (40، 41).

الجدول 12: معاملات العوامل لأسلوب Q-mode ($Fc_{i(Q)}$).

-0.14280	0.12642	-0.59636	0.35235	-0.73261	0.55922
0.13171	0.15912	-0.23228	-0.42781	1.17006	-0.51027
0.14142	0.26764	0.32432	-0.42342	-0.95558	-0.25497
-0.03128	-0.17017	-0.34915	0.44614	1.71291	2.16796
-0.46042	0.05436	0.49407	-0.12373	0.29344	-0.74966
0.13091	0.23203	0.26287	1.26183	-0.38178	-1.03676
0.12877	0.07687	0.37932	-0.42726	1.36349	0.60145
0.06253	-0.46795	-0.09186	-0.04171	-0.13146	-4.45700
-0.03103	0.12401	-0.51479	-0.58614	-1.10215	0.15745
0.07009	-0.40260	0.32295	-0.03162	-1.23366	3.53316

وقد تم الحصول على نفس قيم معاملات العوامل لأسلوب Q-mode (الجدول 12) عند إتباع الانتقال المختصر الذي تشير إليه المعادلتان (42 و43) والاستعانة بالجداول (2 و5 و6) والجداول (2 و5 و9) على التوالي.

3-قيم العوامل factor scores:

حولت البيانات الأولية في الجدول (1) إلى بيانات قياسية يشير إليها الجــدول (13) الذي محتواه عبارة عن عناصر المصفوفة القياسية $\underline{Z}$.

الجدول 13: المصفوفة القياسية $\underline{Z}$ للبيانات الأولية.

0.89564	0.97969	1.01952	-0.53576	-0.58761	-0.69742
-0.49700	-0.03239	-1.11435	-0.82277	-0.73957	0.20212
-0.14884	-0.39673	-1.11435	-1.10978	-0.08105	1.28939
-0.49700	0.25099	0.54532	0.61229	-0.35966	-0.83196
2.28828	1.95128	1.96790	0.26150	2.60370	-0.82257
-0.75812	0.17003	0.07113	-0.47198	-0.71425	1.91516
-0.71460	-0.35625	-1.11435	-0.34442	0.29887	0.72620
-0.58404	-1.16591	-0.16597	1.85602	-0.25834	-0.85073
0.72156	0.17003	-0.16597	-0.82277	-0.58761	-0.67708
-0.70589	-1.57074	0.07113	1.37766	0.42551	-0.25312

يشير الجدول (14) إلى قيم عوامل أسلوب R-mode ($F_{j(R)-sc}$) الناتجة من التطبيق المباشر للتحليل ألعاملي باستخدام إحدى المعادلتين (44) أو (45). وقد تم الحصول على نفس النتائج عند استخدام الانتقال المختصر الذي تشير إليه المعادلة (46) والمعادلة (47) عند الاستعانة بالجداول (2 و5 و8 و13) والجداول (2 و5 و10 و13) على التوالي.

الجدول 14: قيم عوامل أسلوب R-mode ($F_{j(R)-sc}$).

-0.76420	0.48931	-1.47463	0.62950	-0.67537	0.26573
0.70496	0.61583	-0.57421	-0.76378	1.07801	-0.24344
0.75694	1.03578	0.80230	-0.75593	-0.88085	-0.12188
-0.16736	-0.65841	-0.86326	0.79700	1.57827	1.03159
-2.46409	0.21045	1.22209	-0.22070	0.27017	-0.35740
0.70070	0.89798	0.65031	2.25372	-0.35208	-0.49408
0.68921	0.29758	0.93833	-0.76279	1.25626	0.28582
0.33470	-1.81070	-0.22694	-0.07426	-0.12141	-2.12236
-0.16601	0.47999	-1.27289	-1.04654	-1.01591	0.07446
0.37516	-1.55780	0.79891	-0.05622	-1.13710	1.68154

بتطبيق المعادلة (48) أو المعادلة (49) تم الحصول بطريقة مباشرة على قيم العوامل لأسلوب Q-mode ($F_{i(Q)-sc}$) (الجدول 15). وقد تم الحصول على نفس النتائج عند استخدام الانتقال المختصر الذي تشير إليه المعادلتان (50 و51) عند الاستعانة بالجداول (2 و5 و6 و13) والجداول (2 و5 و9 و13) على التوالي.

الجدول 15: قيم عوامل أسلوب Q-mode ($F_{i(Q)-sc}$).

-0.76421	0.48930	1.47463	-0.62950	0.67542	0.26567
0.70496	0.61583	0.57423	0.76376	-1.07803	-0.24341
0.75694	1.03578	-0.80229	0.75593	0.88085	-0.12189
-0.16736	-0.65841	0.86326	-0.79700	-1.57830	1.03151
-2.46411	0.21044	-1.22212	0.22075	-0.27012	-0.35735
0.70070	0.89798	-0.65032	-2.25372	0.35207	-0.49402
0.68922	0.29758	-0.93832	0.76279	-1.25630	0.28582
0.33471	-1.81070	0.22695	0.07425	0.12136	-2.12211
-0.16601	0.47999	1.27290	1.04653	1.01595	0.07440
0.37517	-1.55780	-0.79891	0.05622	1.13709	1.68137

الاستنتاجات والتوصيات:

أمكن الانتقال بين نتائج الأسلوبين R-mode وQ-mode في أية مرحلة تحليلية، ومن النتائج المهمة في التحليل العاملي التي يمكن التوصل إليها عن طريق الانتقال بين الأسلوبين هي: المتجهات المميزة ومتجهات التحميلات ومعاملات العوامل وقيمها، ويتم الحصول على هذه النتائج للأسلوب R-mode من المعادلات: 21 و35 و38 و39 و46 و47 على التوالي، ونتائج أسلوب Q-mode يمكن الحصول عليها من المعادلات: 20 و31 و42 و43 و50 و51 على التوالي.

المصادر العربية

1- الشكرجي، ذنون يونس، (2005)، "استخدام مصفوفتي R-mode وQ-mode في التحليل العاملي"، رسالة ماجستير، كلية علوم الحاسبات والرياضيات، جامعة الموصل، العراق.

2- المشكوري، سعاد خلف، (2001)، "مقارنة أسلوبي المركبات الأساسية والتحليل العاملي لمعالجة مشكلة التعدد الخطي في السيطرة النوعية مع تطبيق عملي"، أطروحة دكتوراه، كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة بغداد، العراق.

3- الجبوري، شلال حبيب وعبد، صلاح حمزة، (2000)، "تحليل متعدد المتغيرات"، دار الكتب للطباعة والنشر، جامعة بغداد، العراق.

4- دبدوب، مروان عبد العزيز والطالب، محاسن صالح، (1997)، "مصفوفتا التباين المشترك والارتباط في التحليل العاملي"، مجلة تنمية الرافدين [52] [19]، (347–358)، جامعة الموصل، العراق.

5- دبدوب، مروان عبد العزيز والكاتب، محمد أسامه، (2005)، "تحليل الاتجاه ومشكلة تعدد العلاقة الخطية في تصميم القطع المجزأة"، مجلة مؤتة للبحوث والدراسات [20] [3] ، (9–23)، جامعة مؤتة، الأردن.

6- دبدوب، مروان عبد العزيز، (1996)، "استخدام مصفوفتي الأعمدة والصفوف في تحليل المكونات الرئيسية"، مجلة تنمية الرافدين [18] [49]، (185–192)، جامعة الموصل، العراق.

المصادر الأجنبية

7- Johnson, D. E. (1998). "Applied Multivariate Methods for Data Analysis"; Duxbury Press, USA.
8- Afifi, A. and Clark, V. (1984). "Computer Aided Multivariate Analysis"; Lifetime Learning Publications, USA.
9- Kuo, B. and Golnaraghi F. (2003). "Automatic Control Systems"; 8th Edition; John Wiley and Sons, USA.
10-Berenson, M. L.; Levine, D. M. and Krehbiel, T. C. (2006). "Basic Business Statistics Concepts and Applications"; 10th Edition; Pearson Prentice Hall, USA.