المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (10) 2006
ص ص [121–135]

مقارنة بين قيم معامل الارتباط الذاتي (ρ) في تقدير المعلمات بطريقة المربعات الصغرى العامة

صفوان ناظم راشد*

الملخص

يهتم هذا البحث بإيجاد انسب طريقة من بين الطرائق التي تقدر قيمة معامل الارتباط الذاتي ($\hat{\rho}$) لكي تمكننا من التخلص من مشكلة الارتباط الذاتي بين قيم المتغيرالعشوائي (حد الاضطراب) وذلك للحصول على ادق مقدرات للنموذج المدروس بطريقة المربعات الصغرى العامة (GLS). ولقد تم استخدام معيار متوسط مربعات الخطأ (MSE) للمقارنة بين كفاءة المقدرات في جميع الطرائق .

Comparison among autocorrelation factor value (ρ) in estimation of generalized least squares method

ABSTRACT:

This research attempts concerns to find the appropriate method among all the methods of estimating the Autocorrelation factor value , to get rid of Autocorrelation problem , among the values of random variable to gain the most accurate value which is studied in generalized least squares method .
Therefore, Mean squares error (MSE) scale has been used to compare the efficiency of all estimates in overall methods.

---

* مدرس مساعد/كلية علوم الحاسبات والرياضيات/جامعة الموصل.
تاريخ التسلم : 27/ 2 /2006 ـــــــــــــ تاريخ القبول : 23/ 4 /2006

المقدمة :

تعد مشكلة الارتباط الذاتي من المشاكل الحساسة التي تظهر اثناء التحليل الاحصائي لبيانات معينة حيث يغلب وجودها على الدراسات التي تاخذ شكل السلاسل الزمنية وكذلك البحوث التي تعتمد على البيانات المقطعية وتظهر ايضاً نتيجة للتشخيص غير الدقيق للعلاقة بين متغير الاستجابة والمتغيرات التوضيحية في نماذج الانحدار المتعدد او قد تكون هنالك عوامل عشوائية تؤثر في القيم المتتالية للخطأ مما يتسبب في حصول ارتباط ذاتي ما بين الاخطاء المتعاقبة والناتجة من الفرق بين القيم المشاهدة والقيم التقديرية لمتغير الاستجابة . مما دعا الى توجه الكثير من الباحثين لدراسة هذه المشكلة وذلك لغرض ايجاد الحل المناسب لها ، وكان من أبرزهم العالم (Aitken) الذي وضع حلاً لهذه المشكلة من خلال إضافة قيمة معامل الارتباط الذاتي (ρ) إلى طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) لتأخذ شكلاً أكثر شمولية في تقدير قيم المعلمات وقد أطلق عليها طريقة المربعات الصغرى العامة (GLS) (Generalized Least-Squares Method)[1].

تم في هذا البحث توضيح جميع الطرائق المستخدمة في ايجاد قيمة معامل الارتباط الذاتي (ρ) وذلك لغرض التوصل الى انسبها في ايجاد مقدرات لمعالم النموذج المدروس بطريقة (GLS) بعد اجراء الكشف عن وجود ارتباط الذاتي من خلال اختبار دربن واطسون (.D.W)، ومن هذه الطرائق طريقة التكرار ((IRTM) Iterative Method) وطريقة (Durban)وطريقة اختبار(D.W) واخيراً طريقة (Theil-Nagar)[3] [4] .

قسم البحث إلى جزأين ، تناول الجزء الأول منه الجانب النظري والذي تم فيه توضيح النموذج الخطي العام وطريقة المربعات الصغرى في تقدير معلمات

النموذج وطرائق تقدير معامل الارتباط الذاتي (ρ). اما الجزء الثاني فتمثل بالجانب التجريبي الذي تم من خلاله استخدام أسلوب المحاكاة بطريقة (MonteCarlo Simulation)[5] حيث تم توليد بيانات لستة متغيرات توضيحية ومتغير استجابة يحوي كل واحد منها (50) مشاهدة مكرره خمسمائة مرة متمثلة بسبعة حالات.واخيراً تم استخدام معيار متوسط مربعات الخطأ (MSE) للمقارنة بين هذه الطرائق .

الجانب النظري

النموذج الخطي العام (GLM).

يعد النموذج الخطي العام امتدادا للنموذج الخطي البسيط إذ يقتصر الأخير على دراسة العلاقة بين متغيرين احدهما المتغير التوضيحي (X) والأخر متغير الاستجابة (Y)، إلا انه في مجال الاقتصاد خاصةً نجد الأمر يتطلب في معظم الأحيان دراسة العلاقة بين أكثر من متغيرين وفي هذه الحالة يطلق على هكذا نموذج بالنموذج الخطي العام[6] [8].

تتوقف أشكال النموذج القياسي ومكوناته على نوعية الدراسة المأخوذة فضلاً عن الهدف الذي يبنى من اجله النموذج ، وعليه يمكن وصف العلاقة الدالية (function relationship)[9] بين متغير الاستجابة والمتغيرات التوضيحية بالصيغة الاتية :-

$$\mathbf{Y_i = \sum_{j=0}^{K} \beta_j X_{ij} + u_i \quad ; i = 1,2,3,...,n} \qquad \text{.......................} \mathbf{(1)}$$

حيث أن :

$$\mathbf{X_{i0}=1}$$

وباستخدام أسلوب المصفوفات والمتجهات يمكن كتابة النموذج (1) أعلاه بالشكل الاتي :-

$$\underline{Y} = \underline{X}\underline{B} + \underline{U} \qquad \text{.....................(2)}$$

حيث أن :-

$\underline{Y}$: متجه يمثل مشاهدات متغير الاستجابة وهو ذو بعد $(n \times 1)$.

$\underline{X}$: مصفوفة مشاهدات المتغيرات التوضيحية وهي ذات بعد $(n \times (K+1))$.

$\underline{B}$: متجه المعلمات المطلوب تقديرها وهو ذو بعد $((K+1) \times 1)$.

$\underline{U}$: متجه الأخطاء العشوائية وهو ذو بعد $(n \times 1)$.

K : عدد المتغيرات التوضيحية .

n : حجم العينة .

إن للنموذج الخطى العام فرضياته الخاصة فمنها ما يخص النموذج وهي المتمثلة بالمعادلة (2) ومنها ما يخص التقدير وهي التي تشير احداها إلى أن الخطأ العشوائي (U_i) له توزيع طبيعي بوسط قدره $(E(U_i)=0)$ وتباين قدره $(E(U'U) = \sigma_u^2 I)$ ، حيث أن (I) مصفوفة أحادية (Unit or Identity Matrix) ذات بعد $(n \times n)$ أي أن الخطأ العشوائي المصاحب لأية مشاهدة لا يتأثر بالخطأ العشوائي لأية مشاهدة أخرى أي عدم توافر ظاهرة الارتباط الذاتي بين الأخطاء العشوائية . أما بالنسبة الى الفرضية الأخيرة فهي متعلقة بالمصفوفة (X) إذ تفترض عدم وجود علاقة خطية تامة (Multicollinearity) بين المتغيرات التوضيحية [9] [10] .

الكشف عن وجود الارتباط الذاتي

يعتبر اختبار دربن-واطسون ((Durbin-Watson Test (D.W.)) من الاختبارات الشائعة الاستخدام للكشف عن وجود او عدم وجود ارتباط ذاتي بين الاخطاء العشوائية للسلسلة الزمنية والناتجة من النموذج الخطي العام المتمثل بالمعادلة (2) ،

اذ تم احتساب الاخطاء العشوائية للنموذج $(U_t = Y_t - \hat{Y}_t)$ ليتم في ضوئها تقدير معامل اختبار دربن–واطسون الموضح بالصيغة الاتية :-

$$D.W. = \frac{\sum_{t=2}^{n}(U_t - U_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n}U_t^2} \qquad \text{..........................(3)}$$

حيث ان $(0 < D.W. < 4)$

فأذا اقتربت قيمة (D.W.) من الصفر يكون هناك ارتباط ذاتي موجب ويكون العكس اذا اقترب من (4) وينعدم وجوده عند القيمة الوسطية للمعاملة (D.W.)، وعليه فان وجود الارتباط الذاتي او عدمه يمكن تحديده على اساس توزيع احصائي [1].

طرائق تقدير معلمات النموذج الخطي العام

في هذا البحث سوف يتم استخدام كل من طريقتي المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) و المربعات الصغرى العامة (GLS) في عملية التقدير ، فبالنسبة الى طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية فإنها تمتاز بخواص عديدة منها سهولة الحساب ومنطقية النتائج التي يتم الحصول عليها وإنها تعطي اقل مقدر غير متحيز (BLUE) ذي اقل تباين في حالة توافر فروض التحليل[2] وصيغتها الرياضية هي:-

$$\hat{\beta}_{OLS} = (X'X)^{-1}X'Y \qquad \text{..................(4)}$$

أما بالنسبة الى طريقة المربعات الصغرى العامة (GLS) فيعد العالم (Aitken)[3] مؤسس هذه الطريقة اذ أعطاها الشمولية في عملية تقدير معلمات النموذج (1) من خلال التخلص من مشكلة الارتباط الذاتي بين الأخطاء وذلك عن طريق إضافة معكوس المصفوفة (Ω) إلى المعادلة (4) لتصبح بالشكل الاتي :-

$$\hat{\beta}_{GLS} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}Y \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

حيث أن :-

Ω : مصفوفة مربعة متماثلة ذات بعد $(n \times n)$ وتأخذ الشكل الاتي :-

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \ldots & \rho^{n-1} \\ & 1 & \rho & \cdots & \rho^{n-2} \\ & & 1 & \cdots & \rho^{n-3} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

حيث ان :-

ρ : تمثل قيمة معامل الارتباط الذاتي .

وفي بحثنا هذا سوف ينصب اهتمامنا على إيجاد الطريقة المثلى والمناسبة لتقدير قيمة (ρ) وذلك للحصول على أفضل تقديرات لمعلمات طريقة المربعات الصغرى العامة .

طرائق تقدير قيمة معامل الارتباط الذاتي

1-الطريقة التكرارية (Iterative Method)[3] .

بموجب هذه الطريقة نبتدئ باستخدام طريقة المربعات الصغرى (OLS) لتقدير معلمات النموذج (الحد الثابت والميل) ومنه نحصل على الأخطاء الناتجة من الفرق بين القيمة المشاهدة والقيمة التقديرية لمتغير الاستجابة $(U_i = Y_i - \hat{Y}_i)$

ومن خلالها يمكن تقدير معامل الارتباط الذاتي (ρ) من الفروق الأولى للأخطاء العشوائية .

$$U_t = \rho U_{t-1} + \xi_t$$

وبتطبيق اسلوب (OLS) لتقدير (ρ) حول نقطة المتوسط وذلك بأخذ مجموع مربعات للفروق بين الاخطاء العشوائية ثم اخذ الاشتفاق لـ (ρ) ومساواتها بالصفر سوف نحصل على :-

$$\sum \xi_t^2 = \sum (U_t - \rho U_{t-1})^2$$

$$\frac{\partial \sum \xi_t^2}{\partial \rho} = \sum U_t^2 - \rho \sum U_t U_{t-1} = 0$$

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=1}^{n} U_t \; U_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} U_{t-1}^2} \qquad \text{..........................(6)}$$

حيث أن :- $t=1,2,3,..,n$

وبعد إيجاد قيمة ($\hat{\rho}$) يتم تعويضها في المعادلة (1) لنحصل على :-

$$Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1} = \hat{\beta}_0 (1-\hat{\rho}) + \hat{\beta}_1 (X_{it} - \hat{\rho} X_{it-1}) + \cdots + (1-\hat{\rho}) U_t$$

وهكذا يعاد هذا الأسلوب في التقدير حتى تتطابق القيم التقديرية لكل من الحد الثابت والميل للنموذج المدروس في المراحل المتتالية .

2- طريقة دربن – واطسون (Durban Method) [1] [6] .

يتم تقدير معامل الارتباط الذاتي بموجب هذه الطريقة على مرحلتين ، اذ تنطوي المرحلة الأولى على التقدير بطريقة (OLS) وفق الصيغة الاتية :-

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \beta_0(1-\rho) + \beta_1(X_t - \rho X_{t-1}) + U_t$$

$$Y_t = \beta_0(1-\rho) + \rho Y_{t-1} + \beta_1 X_t - \beta 1 \rho X_{t-1} + U_t$$

$$Y_t = \beta_0^* + \rho Y_{t-1} + \beta_1 X_t - \gamma X_{t-1} + U_t \qquad \text{.......................(7)}$$

حيث أن :-

$$\beta_0^* = \beta_0(1-\rho) \quad , \quad \gamma = \beta_1 \rho$$

من المعادلة (7) اعلاه نجد ان هناك ثلاثة متغيرات هــي (Y_{t-1}, X_t, X_{t-1}) ، حيث أن الميل الحدي لــ (Y_{t-1}) يعطي قيمة معامل الارتباط الذاتي (ρ) ومنهـا يمكن تعويضها في المرحلة الثانية في المعادلة رقم (5) من خلال قيمــة (Ω) و المأخوذة بطريقة (GLS) ، عليه يتم تعميم هذه الطريقة إلى (K) من المتغيــرات التوضيحية وكالاتي :-

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \beta_0^* + \beta_1(X_{1t} - \rho X_{1t-1}) + \beta_2(X_{2t} - \rho X_{2t-1}) + \cdots + \beta_k(X_{kt} - \rho X_{kt-1}) + (1-\hat{\rho})U_t$$

3- **تطبيق (OLS) باستخدام اختبار (.D.W)**[7] .

تستند هذه الطريقة الى تقدير المعلمة (ρ) من خلال قيمة (.D.W) التـــي تمثل اختبار فرضية والذي يحدد نوعية الارتباط الذاتي أو عدمه والذي تم ذكره انفاً معتمدين فيه على الصيغة المعادلة (3) في عملية التقدير وعلى النحو الاتي:-

$$\mathbf{D.W.} = \frac{\sum_{t=1}^{n}(U_t - U_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} U_t^2} = \frac{\sum_{t=1}^{n} U_t^2 - 2\sum_{t=1}^{n} U_t U_{t-1} + \sum_{t=1}^{n} U_t^2}{\sum_{t=1}^{n} U_t^2}$$

وعندما تكون حجم العينة كبير يمكن القول :-

$$\sum_{t=2}^{n} U_t^2 \approx \sum_{t=1}^{n} U_t^2 \approx \sum_{t=2}^{n} U_{t-1}^2 \quad ; \quad \sum_{t=1}^{n} U_t U_{t-1} \approx \sum_{t=2}^{n} U_t U_{t-1}$$

لتصبح المعادلة على النحو الاتي :-

$$\mathbf{D.W.} = \frac{2\sum_{t=1}^{n} U_t^2 - 2\sum_{t=1}^{n} U_t U_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} U_t^2}$$

وعلبه يمكن كتابة المعادلة أعلاه بشكل مختصر كالأتي :-

$$\mathbf{D.W.} = 2 - 2\,\frac{\sum_{t=1}^{n} U_t \; U_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} U_t^2}$$

وبما أن : $\rho = \dfrac{\sum_{t=1}^{n} U_t \; U_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} U_t^2}$

إذاً سوف نحصل على الصيغة النهائية لتقدير المعلمة (ρ) وعلى النحو الآتي :-

$$\hat{\rho} = 1 - \frac{D.W.}{2} \qquad \text{.......................(8)}$$

4- طريقة ثايل – نكار (Theil-Nagar Method)[3] .

تعتمد هذه الطريقة على صيغة المعادلة (8) اذ يتم الاخذ بنظـــر الاعتبـــار عدد المشاهدات المأخوذة وعدد معلمات النموذج المدروس مع المقطع لغرض تقدير الارتباط الذاتي حسب أسلوب ثايل والموضحة بالصيغة الاتية :-

$$\hat{\rho} = \frac{n^2\left(1 - \frac{D.W.}{2}\right) + (K+1)}{n^2 - (K+1)^2} \qquad \text{..................(9)}$$

من خلال هذه الطرائق سوف يتم تحددبد انسب طـــريقة نجد فيها القيمـــة المـــــثلى والمناسبة لـــ(ρ) لغرض تعويضها في المصفوفة (Ω) والموضحة في صيغة (5) لنحصل على مقدرات المربعات الصغرى العامة (GLS) ، وسيكون معيار القياس للمقدرات الذي يحدد انسب طريقة من بين هذه الطرائق هـــو متوســـط مربعـــات الأخطاء (Mean Squares Error) والموضح بالصيغة الاتية :-

$$MSE(\hat{\beta}) = \frac{\sum_{i=1}^{K+1} (\hat{\beta}_i - \bar{\beta})^2}{K} \qquad \text{.....................(10)}$$

حيث أن :-

$\bar{\beta}$: الوسط الحسابي لقيم المعلمات المقدرة .

الجانب التجريبي

تم في هذا المبحث عملية تقدير معامل الارتباط الذاتي (ρ) بالطرائق التي تم التعرف عليها ، اذ تم تكوين سبعة أعمدة يضم كل عمود منها خمسين مشاهدة تم أخذها من عينة مكونه من مائتين وخمسين مشاهدة بمساعدة برنامج حاسوبي (Minitab Under Windows) تتوزع توزيعاً طبيعياً لتشكل معادلة خطية مكونه من ستة متغيرات توضيحية والموضحة بالشكل الآتي :

$$\mathbf{Yi = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \beta_3 X_{i3} + \beta_4 X_{i4} + \beta_5 X_{i5} + \beta_6 X_{i6} + \varepsilon_i \quad ...(11)}$$

حيث أن:

$$\varepsilon_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

وتم وضع عدة حالات ارتباط بين المتغيرات التوضيحية (X_1,X_2,X_3) وبقيمة ارتباط (α) ، كذلك بين المتغيرات التوضيحية (X_4,X_5,X_6) وبقيمة ارتباط (α^*) والموضحة أدناه :

$$X_{ij} = (1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}} C_{ij} + \alpha C_{i7} \quad ; \quad j = 1,2,3 \quad ; \quad i = 1,2,..,50$$

$$X_{ij} = (1-\alpha^{*2})^{\frac{1}{2}} C_{ij} + \alpha^{*2} C_{i7} \quad ; \quad j = 1,2,3 \quad ; \quad i = 1,2,..,50$$

ومن ثم تم ايجاد قيم معامل الارتباط الذاتي ($\hat{\rho}$) بالطرائق الموضحة سابقاً بعد الكشف عن وجود هذا الارتباط الذاتي بين الاخطاء العشوائية وتعويضها في مصفوفة (Ω) في المعادلة (5) للحصول على مقدرات المربعات الصغرى العامة (GLS) وخيراً تم ايجاد متوسط مربعات الأخطاء (MSE) حسب المعادلة (10) لكل طريقة ولجميع الحالات، والجدولان الاتيان يبينان نتائج الدراسة .

الاستنتاجات:

1-ظهور تقارب كبير في القيم المقدرة لمعامل الارتباط الذاتي (ρ) بين طريقة التكرار (IRTM) في حالة التقدير الأول وطريقة اختبار(.D.W) ، مما ينتج عنه تقارب كبير أيضاً في تقدير معلمات النموذج المدروس وفي جميع الحالات المأخوذة .

2-تفوق طريقة (Thiel-Nagar) على باقي الطرائق التي تسعى إلى تقدير المعلمة (ρ) من خلال الحصول على اقل قيمة لـ ($\mathbf{MSE}(\hat{\beta})$) في حالة ($\alpha = \mathbf{0.5}, \alpha^* = \mathbf{0.5}$)و ($\alpha = \mathbf{0.9}, \alpha^* = \mathbf{0.9}$) أثناء الزيادة المتساوية التي نلاحظها في قيمة الارتباط (α, α^*) الموجودة بين المتغيرات التوضيحية فضلاً عن التفوق الذي يظهر لهذه الطريقة في الحالات ($\alpha = \mathbf{0.1}, \alpha^* = \mathbf{0.1}$) و($\alpha = \mathbf{0.1}, \alpha^* = \mathbf{0.5}$) و($\alpha = \mathbf{0.5}, \alpha^* = \mathbf{0.9}$) بالرغم من التفوق في طريقة التكرار ولكن بعد عدة مراحل من عملية التكرار وهذا ما نلاحظه في التقارب الذي يظهر في قيمة ($\mathbf{MSE}(\hat{\beta})$) بين الطريقتين أثناء المقارنة .

3-يمكن ملاحظة التفوق لطريقة (Durban) على بقية الطرائق وذلك لحصولها على اقل قيمة لـ ($\mathbf{MSE}(\hat{\beta})$) في حالة ($\alpha = \mathbf{0.1}, \alpha^* = \mathbf{0.9}$) و ($\alpha = \mathbf{0.9}, \alpha^* = \mathbf{0.1}$) من خلال الاختلافات الكبيرة التي تُظهر وجود علاقة خطية بين التغيرات التوضيحية وعدم وجود هذه العلاقة بين المتغيرات من جهة أخرى.

التوصيات:

1-تحديد نوعية الارتباط الموجود بين المتغيرات التوضيحية قبــل اســتخدام أيــة طريقة من الطرائق لغرض تقدير قيمة (ρ) ومنها تقدير معلمــات النمــوذج بطريقة (GLS) .

2-استخدام طريقة (Theil-Nagar) كأنسب طريقة من بقية الطرائق لغرض تقدير قيمة معامل الارتباط الذاتي (ρ) لكي توصلنا إلى أفضل تقــديرات لمعلمــات النموذج المدروس بطريقة المربعات الصغرى العامة (GLS) .

3-استخدام طريقة (Durban) كأنسب طريقة من باقي الطرائق لتقدير قيمــة (ρ) لنحصل منها على معلمات النموذج $(\hat{\beta})$ بطريقة (GLS) في حالــة اكتشــاف وجود تداخل خطي بين المتغيرات التوضيحية بشكل كبيــر فــي قيمــة (α) ووجود تداخل خطي بين المتغيرات التوضيحية منخفض من طرف ثــانٍ فــي قيمة (α^{*}) والعكس صحيح .

المصادر :

1- الحسناوي ، أموري هادي كاظم وباســم شــليبه مســلم (2002) ، "القيــاس الاقتصادي المتقدم- النظرية والتطبيق" ،الطبعة الثانية ،مطبعة الطيف ،جامعــة بغداد .

2- الحسناوي ، أموري هادي كاظم وعصام خضير (1999) ، "طبيعة البيانــات الإحصائية وبناء النماذج القياسية "،دار وائل للنشر ،عمان،الاردن.

3- السيفو ، وليد إسماعيل (1988) ،"المدخل إلى الاقتصــاد القياســي" ،مطبعــة مديرية دار الكتب للطباعة والنشر ، جامعة الموصل .

4-Anderson, T.W. (1985);"An Introduction to Multivariate statistical Analysis", 2nd ed. , John wiley and Sons ,New york , U.S.A.

5-Chrishtopher,Z.M.;(1997);"Monte carlo Simulation" ,SAGE publications,New Delhi .

6-Dutta M. (1968);"Econometric Methods";Suoth-Western Company,Newyork.

7-Durbin. J. and Watson. G. (1951);"Tseting for serial Correlation in Least squares Regression "Biometricka;Vol(38),PP.159-177.

8- Harvey. A.C. (1990);"The Econometrics Analysis of time series"; Cambridge, Mass, the MIT Press

9-Ramanathan, R. (1992);"Introduction to Econometrics with Applications", 2nd. ed. Fort Worth; the Dryden Press.

10-Salvatory. D. (1976);"Statistics and Econometrics"; Schaums outline Series in Econometrics ,McGraw-Hill Book Company.