Journal of Education and Science (ISSN 1812-125X)

A Field Study Using Some Properties and Applications of Soft ii-Open Sets

A. B. Dawod[(1)] **S. W. Askandar**[(2)]

[1,2*] Department of Mathematics/College of Education for Pure Science/ University of Mosul/Mosul/Iraq

Article information

Article history:
Received: November 18, 2023
Revised: January 12, 2024
Accepted: January 15, 2024
Available online: March 01, 2024

Keywords:
Soft Sets
Soft Topology
Soft ii-Connectedness
Soft ii-Compactness

Correspondence:
Sabih W. Askandar
sabihqaqos@uomosul.edu.iq

Abstract

In this research, we presented a new method for collecting data and performing calculations to obtain the required results differently from what have been studied before. In the beginning, we introduce new types of soft sets in soft topological spaces, explaining many properties such as soft ii-dense sets, soft ii-connectedness, soft ii-perfection, and soft ii-compactness. We proved that any soft set *(S,E)* could be soft ii-connected in *(X,τ,E)* when it is soft ii-connected in a soft partial sub-space $(\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{\tau}^*, \boldsymbol{E})$), In addition, we used the concept of soft topology in calculating the cost of service projects in several areas of the town of Bashiqa, in the Nineveh Governorate/north of Iraq, this project was achieved either in a specific region or several regions by using the theorem of soft sets in soft topological spaces. Infrastructure projects were undertaken in the areas of Bashiqa, Al-Darwish, Baibukht, and the villages of Al-Fadhiliya and Omar Qabji. Such as paving and covering various roads, building schools, and health centers, and extending groundwater networks.

DOI: 10.33899/edusj.2024.144736.1407

1. المقدمة

تعتبر التبولوجيا الناعمة موضوعًا جديدًا وأساسيًا للدراسة نسبيًا ولديها القدرة على تغيير طريقة التفكير من خلال تعزيز الطرائق الإبداعية المبتكرة بالإضافة الى النمذجة الرياضياتية التي تعد حقًا ثورة علمية في حل الموضوعات المعقدة في العديد من المجالات العلمية . فقد أقترح مولودتسوف فكرة المجموعة الناعمة في عام 1999، بعد ذلك طور مولودتسوف مع عدد من الباحثين تطبيق فكرته في العديد من المجالات والاتجاهات البحثية (انظر [2] ,**[13]**).

لقد قدمت فكرة التبولوجيا الناعمة في العديد من الدراسات في الفضاءات التبولوجية الناعمة (انظر **[7]** ,**[8]** , [9], **[11]**]) . قدم محمد واسكندر فكرة المجاميع المفتوحة من النمط i – في الفضاءات التبولوجية الثنائية في عام (2018) (انظر**[14]**).

في الأعوام 2020، 2021، 2022 قدم أيضاً محمد واسكندر اصناف المجاميع المفتوحة الناعمة من النمط – i, والمجاميع المفتوحة الناعمة من النمط – ii ، بديهيات الفصل الناعمة من النمط–$\boldsymbol{i}$ والتطبيقات الناعمة من النمط – ii في الفضاءات التبولوجية الناعمة (انظر**[3]** ,[4] و **[5]**).

إن جمع البيانات هو عملية فحص كمية هائلة من البيانات لتحديد البيانات المنطقية والتي نحتاجها فعلا في عملنا بحيث تكون العلاقة بين تلك البيانات المجمعة خاضعة لسلطة مالكها وهو من يحدد طريقة تقديمها فيما بعد.

استخدم محمود المجموعة الناعمة والتبولوجية الناعمة لحساب تكلفة مشاريع البنية التحتية في العديد من المناطق السكنية في محافظة بغداد في عام (2015)(انظر[12]). اسكندر أوجد نظامًا رياضيًا باستخدام التبولوجيا الناعمة لحساب تكلفة مشاريع خدمية في منطقة تلكيف (انظر **[6]**).

في هذا العمل, وفي البداية في الجزء النظري منه, قمنا بدراسة صنف جديد من المجاميع الناعمة في الفضاءات التبولوجية الناعمة مع بعض خصائصها من خلال البراهين وهي المجاميع المفتوحة الناعمة من النمط $ii-$ (انظر **[3]** , **[5]**). أمّا في الجزء العملي, فقد استخدمنا فكرة المجموعة بشكل عام الناعمة لحساب تكلفة المشاريع الخدمية k في عدد n من المناطق في أي مدينة بشكل عام. بعد ذلك قمنا بتطبيق هذه الطريقة خصيصًا لحساب تكلفة (4) مشاريع خدمية في (5) مناطق من ناحية بعشيقة شمال العراق من محافظة نينوى.

(X,τ,E) يرمز دائما للفضاء التبولوجي الناعم خلال هذه الدراسة بشكل مختصر (sTs). عائلة المجاميع المفتوحة الناعمة والمجاميع المغلقة الناعمة سنرمز لها $s-Os(X_E)$, $s-Cs(X_E)$ على التوالي .

2. اساسيات التبولوجيا الناعمة

في هذا الجزء سنقوم بإعطاء عدة تعاريف تمثل اساسيات التبولوجيا الناعمة كالمجموعة الناعمة ، تقاطع مجموعتين ناعمتين، اتحاد مجموعتين ناعمتين، الفرق بين مجموعتين ناعمتين، وعدد من العلاقات الاخرى.

تعريف1−2:(**[15]**) لتكن X فضاء غير خال، ولتكن $P(X)$ مجموعة القوى لـــX ، E مجموعة المعلمات و $(\emptyset \neq A \subseteq E)$. الزوج المرتب (K,A) او K_A يسمى مجموعة ناعمة ("Soft set") بالنسبة لـ X إذ يمثل K التطبيق $K: A \rightarrow P(X)$.

$K_A=\{K(e): e\in A\subseteq E,\ K:A\rightarrow P(X)\}$، $K(e)$ تمثل عائلة جميع المعاملات للمجموعة الناعمة (K,A). $SS(X_A)$ ترمز الى عائلة كل المجاميع الناعمة بالنسبة للفضاء X .

تعريف2−2: (**[13]**) لتكن L_BوK_A مجموعتين ناعمتين في الفضاءX_E . عندئذ تكون K_A مجموعة ناعمة جزئية من المجموعة الناعمة L_B ويرمز لهذه العلاقة بـ$K_A\tilde{\subseteq}L_B$ اذا تحققت الشروط:1. $A\subseteq B$ .2 $K(e)\subseteq L(e)$, لكل $e\in A$.

تعريف3−2:(**[13]**) المجموعتان الناعمتان L_BوK_A في الفضاءX_E تكونان متساويتين اذا كان $K_A\tilde{\subseteq}L_B$ و $(L_B\tilde{\subseteq}K_A)$.

تعريف4−2:([2]) متممة المجموعة الناعمة (K,A) يرمز لها بالرمز $(K,A)^c$ وتعرف بالشكل التالي $(K,A)^c=(K^c,A)$، حيث ان التطبيق $K^c: A\rightarrow P(X)$ يعرف بالشكل

$K^c(e)=X-K(e)$ لكل $e\in A$. من الواضح بان $((K,A)^c)^c=(K,A)$.

تعريف 5−2:([19]) الفرق بين المجموعة الناعمة (K,E) والمجموعة الناعمة (L,E) في الفضاء X ويرمز له بالشكل $(K,E)\tilde{\setminus}(L,E)$ هو مجموعة ناعمة ايضا (M,E) إذ إنَ $M(e)=K(e)\setminus L(e)$ لكل $e\in E$.

تعريف 6−2:([19]) اذا كانت (K,E) مجموعة ناعمة في الفضاءX و $x\in X$،يقال بان $x\tilde{\in}(K,E)$ اذا تحقق الشرط $x\in K(e)$ لكل $e\in E$.

تعريف 7−2:([19]) اذا كانت$x\in X$ يقال للمجموعة الناعمة(x,E) في الفضاءX والتي تعرف بالشكل$x_E(e)=\{x\}$ لكل $e\in E$ ويرمز لها بالرمزx_E ، النقطة الناعمة الاحادية ("Single soft point").

تعريف 8−2: (**[13]**) يقال للمجموعة الناعمة(K,A) في الفضاءX بانها:

1. مجموعة ناعمة تافهة او خالية("Null soft set") ويرمز لها بالرمز ϕ_A او ϕ اذا كان لكل $e \in A$ ، $K(e)=\phi$.
2. مجموعة ناعمة مطلقة او تامة ("Absolute soft set")ويرمز لها بالرمز $\tilde{A}$ او X_A اذا كان لكل $e \in A$ ، $K(e) = X$. من الواضح بان $\phi_A^C = X_A$ و $X_A^C = \phi_A$.

تعريف 9−2: ([19]) يقال للمجموعة الناعمة (K,E) في الفضاء X بانها نقطة ناعمة (soft point) في X ويرمز لها بالشكل e_K اذا وجدت نقطة $x \in X$ و $e \in E$ إذ إنَ ان $K(e) \neq \phi$ وكذلك $K(e^c) = \phi$ لكل $e^c \in E\text{-}\{e\}$. النقطة الناعمة e_K تنتمي الى المجموعة الناعمة (G,E) اذا كان لكل $e \in E$ ، $e_K \subseteq G(e)$. يرمز لعائلة كل النقاط الناعمة في الفضاء X بالرمز $SP(X)$.

تعريف 10−2: (**[13]**) اتحاد المجموعتين الناعمتين (K,A) و (L,B) في الفضاء X هو ايضا مجموعة ناعمة (M,C) إذ إنَ $C= A \cup B$ لكل $e \in C$ و

$$M(e) = \begin{cases} K(e), & e \in A \setminus B \\ L(e), & e \in B \setminus A \\ K(e) \cup L(e), & e \in A \cap B \end{cases}$$

تعريف 11−2: (**[13]**) تقاطع المجموعتين الناعمتين (K,A) و (L,B) في الفضاء X هو ايضا مجموعة ناعمة (M,C) بحيث ان $C=A\cap B$ لكل $e \in C$ و $M(e)=K(e)\cap L(e)$.

تعريف 12−2: ([9]) لتكن I تمثل اية قيمة او عداداً عشوائياً ولتكن $L= \{(K_i,E), i\in I\}$ عائلة جزئية من عائلة المجاميع الناعمة $SS(X_E)$ فان:

1. (M,E) تعتبر مجموعة ناعمة وحاصل اتحاد المجاميع الناعمة في العائلة L بحيث ان $M(e)=\cup_{i\in I}K_i(e)$ لكل $e\in E$ و $\cup_{i\in I}(K_i, E) = (M,E)$.
2. (N,E) تعتبر مجموعة ناعمة وحاصل تقاطع المجاميع الناعمة في العائلة L بحيث ان $N(e)=\cap_{i\in I}K_i(e)$ لكل $e\in E$ و $\cap_{i\in I}(K_i; E) = (N, E)$.

تعريف 13−2:([1]) لتكن E مجموعة المعلمات ولتكن X فضاء غير خالٍ، عندئذ الصف الناعم(soft class) الذي يرمز له بالرمز (X,E) هو عبارة عن عائلة كل المجاميع الناعمة في X والمصاحبة لتطبيق تعريف المجموعة الناعمة على عناصر E .

مأخوذة 1−2:([17]) لتكن (K, A) و (L,A) مجموعتين ناعمتين في X_A عندئذ:

1. $(K,A)\tilde{\cap}(K,A)^c =\phi_A$.
2. $(K,A) \tilde{\cap}(L,A) = \phi_A$ اذا وفقط اذا $(K,A)\tilde{\subseteq}(L,A)^c$ و $(L,A)\tilde{\subseteq} (K,A)^c$.
3. $(K,A) \tilde{\subseteq} (L,A)$ اذا وفقط اذا $(L,A)^c\tilde{\subseteq} (K, A)^c$.

مأخوذة 2−2:([18]) لتكن (K, A) و (L, A) مجموعتين ناعمتين في X_A عندئذ:

1. $((K,A) \tilde{\cup} (L,A))^c = (K,A)^c \tilde{\cup} (L,A)^c$.
2. $((K,A) \tilde{\cap} (L,A))^c = (K,A)^c\tilde{\cap} (L,A)^c$.

3. الداخل الناعم والانغلاق الناعم

في هذا الجزء سنقوم بإعطاء تعريف الفضاء التبولوجي الناعم وشروطه، تعريف الداخل الناعم، الانغلاق الناعم، التطبيق الناعم، صورة المجموعة الناعمة، وتعريف الصورة العكسية للمجموعة الناعمة وعدد من المأخوذات ومثال عن التعاريف المذكورة.

تعريف 1−3: ([18]) لتكنτ عائلة من المجاميع الناعمة فيX ، يقال عندئذ بان τ تمثل تبولوجيا ناعمة("Soft topology") علىX او (X, τ, E) يكون فضاء تبولوجياً ناعماً ("Soft topological space") اذا تحققت الشروط الثلاثة الاتية:

1. $\emptyset_E$ وX_E تنتمي الىτ .
2. اتحاد أي عدد منته او غير منته من عناصرτ ينتمي الىτ .
3. تقاطع أي عدد منته من عناصرτ ينتمي الىτ .

عناصر τ تسمى مجاميع مفتوحة ناعمة$(sOs(X_E))$("Soft open sets"). متممات المجاميع المفتوحة الناعمة تسمى مجاميع مغلقة ناعمة("Soft closed sets") $(sCs(X_E))$.

تعريف 2−3:([18]) لتكن(K,E) مجموعة ناعمة في الفضاء التبولوجي الناعم(X, τ ,E) عندئذ تقاطع عائلة كل المجاميع المغلقة الناعمة التي تحوي(K,E) تسمى الانغلاق الناعم("Soft closure") للمجموعة(K,E) والذي يرمز له بالرمز$Cl(K,E)$. الانغلاق الناعم للمجموعة (K,E) هو اصغر مجموعة مغلقة ناعمة تحوي(K,E).

تعريف 3−3:(**[11]**) لتكن(K,E) مجموعة ناعمة في الفضاء التبولوجي الناعم(X, τ ,E) عندئذ اتحاد عائلة كل المجاميع المفتوحة الناعمة المحتواة في(K,E) تسمى الداخل الناعم ("Soft interior") للمجموعة(K,E) والذي يرمز له بالرمز$Int(K,E)$. الداخل الناعم للمجموعة(K,E) هو أكبر مجموعة مفتوحة ناعمة محتواة في(K,E).

ماخوذة 1−3: (**[11]**) لتكن (K,E) مجموعة ناعمة في(X, τ ,E) عندئذ:

1. $Int(K, E)^c = (Cl(K ,E))^c$.
2. $Cl(K,E)^c = (Int(K,E))^c$.
3. $Int(K,E) = (Cl(K,E)^c)^c$.

تعريف 4−3:([1]) لتكن(X,E) و(Y,E^*) صفين من المجاميع الناعمة ، وليكن$u:X\longrightarrow Y$ و $p:E\longrightarrow E^*$ تطبيقين، عندئذ التطبيق $f_{pu}:(X,E) \longrightarrow (Y,E^*)$ يعرف بالشكل الآتي:

للمجموعة الناعمة(F,A) في(X,E) ، فان$(f_{pu}(F,A),B)$، $B=p(A) \subseteq E^*$هو مجموعة ناعمة في(Y,E^*) تعطى بالشكل الاتي:

$$f_{pu}(F,A)(\beta) =\begin{cases} u\left(\bigcup_{\alpha\in p^{-1}(\beta)\cap A} F(\alpha)\right), if\ p^{-1}(\beta)\cap A \neq \emptyset \\ \phi, otherwise \end{cases}$$

لكل $\beta \in B \subseteq E^*$، $(f_{pu}(F,A),\ B)$تسمى صورة ناعمة("Soft image") للمجموعة الناعمة(F,A). اذا كانت $B=E^*$ عندئذ $f_{pu}((F,A),E^*)$ تكتب بالشكل$f_{pu}(F,A)$.

تعريف 5−3:([1]) لتكن(X,E) و(Y,E^*) صفين من المجاميع الناعمة ، وليكن$u:X\longrightarrow Y$ و $p:E\longrightarrow E^*$ تطبيقين، عندئذ التطبيق $f_{pu}:(X,E) \longrightarrow (Y,E^*)$ يعرف بالشكل الآتي:

للمجموعة الناعمة(G,C) في(Y,E^*)،$C\subseteq E$ فان$(f^{-1}_{pu}(G,C),D)$، $D=p^{-1}(C)$ هو مجموعة ناعمة في(X,E) يعطى بالشكل الآتي:

$$f^{-1}_{pu}(G,C)(\alpha)=\begin{cases} u^{-1}\left(G\left(P(\alpha)\right)\right), if\ p(\alpha)\in C \\ \phi, \quad otherwise \end{cases}$$

لكل$\alpha \in D \widetilde{\subseteq} E$ ، $(f^{-1}_{pu}(G,C),D)$تسمى معكوس صورة ناعمة ("Soft inverse image") للمجموعة الناعمة(G,C). من الآن فصاعدا سنرمز لـ$f_{pu}((F,A),E^*)$ بالشكل$f_{pu}(F,A)$.

مأخوذة 2-3: ([1])،([10]) لتكن (F,A) و (F_1,A) مجموعتين ناعمتين في X_A ولتكن (G,B) و (G_1,B) مجموعتان ناعمتان في Y_B وليكن $f_{pu}:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$ تطبيقا عندئذ العبارات الاتية صائبة:

1. اذا كانت $(F,A)\widetilde{\subseteq}(F_1,A)$ فان $f_{pu}(F,A)\widetilde{\subseteq}f_{pu}(F_1,A)$.
2. اذا كانت $(G,B)\widetilde{\subseteq}(G_1,B)$ فان $f^{-1}_{pu}(G,B)\widetilde{\subseteq}f^{-1}_{pu}(G_1,B)$.
3. $(F,A)\widetilde{\subseteq}f^{-1}_{pu}(f_{pu}(F,A))$.
4. $f_{pu}(f^{-1}_{pu}(G,B))\widetilde{\subseteq}(G,B)$.
5. $f^{-1}_{pu}((G,B)^c)\widetilde{\subseteq}(f^{-1}_{pu}(G,B))^c$.
6. $f_{pu}((F,A)\widetilde{\bigcup}(F_1,A))=f_{pu}(F,A)\widetilde{\bigcup}f_{pu}(F_1,A)$.
7. $f_{pu}((F,A)\widetilde{\bigcap}(F_1,A))\widetilde{\subseteq}f_{pu}(F,A)\widetilde{\bigcap}f_{pu}(F_1,A)$.
8. $f^{-1}_{pu}((G,B)\widetilde{\bigcup}(G_1,B))=f^{-1}_{pu}(G,B)\widetilde{\bigcup}f^{-1}_{pu}(G_1,B)$.
9. $f^{-1}_{pu}((G,B)\widetilde{\bigcap}(G_1,B))=f^{-1}_{pu}(G,B)\widetilde{\bigcap}f^{-1}_{pu}(G_1,B)$.

تعريف6-3: (**[16]**)،([18]) المجموعة الناعمة (G,E) في الفضاء التبولوجي الناعم (X,τ,E) تسمى جواراً ناعماً ("Soft neighborhood") للنقطة الناعمة $F(e)$ اذا وجدت مجموعة مفتوحة ناعمة (H,E) بحيث ان $F(e)\widetilde{\in}(H,E)\widetilde{\sqsubseteq}(G,E)$. المجموعة الناعمة (G,E) في (X,τ,E) تسمى جواراً ناعماً للمجموعة الناعمة (F,E) اذا وجدت مجموعة ناعمة (H,E) بحيث ان $(F,E)\widetilde{\sqsubseteq}(H,E)\widetilde{\sqsubseteq}(G,E)$. عائلة كل الجوارات الناعمة للنقطة الناعمة $F(e)$ يرمز لها بالرمز $N\tau(F(e))$.

تعريف7-3:([19]) ليكن (X,τ,A) و (Y,τ^*,B) فضاءين تبولوجيين ناعمين، ولتكن $u:X\longrightarrow Y$، $p:A\longrightarrow B$ و $f_{pu}:SS(X_A)\longrightarrow SS(Y_B)$ تطبيقات. لتكن $e_F\in SP(X)$. عندئذ f_{pu} يسمى تطبيق مستمر ناعم من النمط-pu ("Soft pu-continuous mapping") عند النقطة الناعمة e_F اذا كان لكل $(G,B)\widetilde{\in}N_{\tau^*}(f_{pu}(e_F))$ توجد $(H,A)\widetilde{\in}N_\tau(e_F)$ بحيث ان $f_{pu}(H,A)\widetilde{\sqsubseteq}(G,B)$. f_{pu} تكون مستمرة ناعمة من النمط-pu على X اذا كانت مستمرة ناعمة من النمط-pu عند جميع النقاط الناعمة في X.

مثال 1-3:

لتكن $\tau=\{\phi_E,(F_1,E),(F_2,E),X_E\}$ ،$X=\{5,3,1\}$، $E=\{r,s\}$.

حيث $(F_1,E)=\{(r,\{5\}),(s,\{5\})\}$،$(F_2,E)=\{(r,\{5,1\}),(s,\{5,1\})\}$،

لتكن "$(F,E)=\{(r,\{5,3\}),(s,\{5,3\})\}$"،

المجاميع المفتوحة الناعمة هي:

$$sOs(X_E)=\{\phi_E,(F_1,E),(F_2,E),X_E\}$$

المجاميع المغلقة الناعمة هي:

$sCs(X_E)=\{X_E,(F_1,E)^c=\{(r,\{3,1\}),(s,\{3,1\})\}$ ، $(F_2,E)^c=\{(r,\{3\}),(s,\{3\})\},\phi_E\}$

نلاحظ ان $(F_1,E)\widetilde{\sqsubseteq}((F_2,E)$ ،$int(F_1,E)=(F_1,E)$ ،$Cl(F_1,E)=X_E$ ،$(F_1,E)\widetilde{\sqcap}((F_2,E)=(F_1,E)$ ، $(F_1,E)\widetilde{\sqcup}(F_2,E)=(F_2,E)$.

4. الجانب النظري للمجاميع الناعمة : المجموعة الناعمة من النمط – ii, المجموعة التامة الناعمة من النمط – ii, الترابط الناعم من النمط – ii, والتراص الناعم من النمط – ii.

في هذا الجزء سنقوم بإعطاء ودراسة عدد من التعاريف مثل تعريف المجموعة الناعمة من النمط-ii ، متممة المجموعة الناعمة من النمط-ii، الانغلاق الناعم من النمط-ii، الداخل الناعم من النمط-ii، نقاط الغاية من النمط-ii، المجموعة التامة الناعمة من النمط – ii, الترابط الناعم من النمط – ii, والتراص الناعم من النمط – ii. وعدد من المبرهنات الخاصة بهذه المفاهيم.

تعريف1–4: [3], [5] لتكن (S,E) مجموعة ناعمة في الفضاء (X,τ,E) يقال لـ (S,E) بأنها مجموعة مفتوحة ناعمة من النمط – ii (Soft $ii-$ open set) اذا كان هناك مجموعة مفتوحة ناعمة $(J,E)\neq\emptyset_E, X_E$ بحيث يتحقق الشرط $(S,E)\tilde{\subseteq}Cl((S,E)\tilde{\cap}(J,E))$ و $int\,(S,E)=(J,E)$.

تعريف **2–4: [3]** متممة المجموعة المفتوحة الناعمة من النمط – ii تسمى مجموعة مغلقة ناعمة من النمط – ii (Soft $ii-$ closed set).

تعريف **3–4: [3]** تقاطع المجاميع المغلقة الناعمة من النمط – ii على X التي تحوي (S,E) يسمى الانغلاق الناعم من النمط – ii لـ (S,E) (Soft $ii-$ closure) ويرمز له بالرمز $(sII-Cl(S,E))$.

تعريف **4–4: [3]** الداخل الناعم من النمط – ii للمجموعة الناعمة (S,E) (Soft $ii-$ Interior) هو اتحاد كل المجاميع المفتوحة الناعمة من النمط – ii على X المحتواة في (S,E) ويرمز لها بـ $(sII-Int(S,E))$. يشير رمز $sII-Cs(X_E)$ و $sII-Os(X_E)$ الى عائلة المجاميع المغلقة الناعمة من النمط – ii و المجاميع المفتوحة الناعمة من النمط – ii في الفضاء (X,τ,E) على التوالي.

مأخوذة1–4: نفرض أنَ $(S,E)\tilde{\in}SS(X_E)$ و $m\in X$ ولتكن $G\subseteq X$ عندئذ:

1. $(S,E)\tilde{\setminus}\{m\}=\{S(r)\setminus\{m\}:\forall \boldsymbol{r}\in\boldsymbol{E}\}$.

2. $(S,E)\tilde{\cup}\boldsymbol{G}=\{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})\cup\boldsymbol{G}:\forall\boldsymbol{r}\in\boldsymbol{E}\}$.

3. $(S,E)\tilde{=}G$ if and only if $S(r)=G$, $\forall\boldsymbol{r}\in\boldsymbol{E}$.

4. $(S,E)\tilde{\cup}\{\boldsymbol{m}\}=\{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})\cup\{\boldsymbol{m}\}:\forall\boldsymbol{r}\in\boldsymbol{E}\}$.

5. $(S,E)\tilde{\cap}\{\boldsymbol{m}\}=\{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})\cap\{\boldsymbol{m}\}:\forall\boldsymbol{r}\in\boldsymbol{E}\}$.([11]), ([12]), ([14]), ([15]) .

تعريف 5–4:[3] ، [5]، [6] ليكن $\boldsymbol{(S,E)\tilde{\in}SS(X_E)}$, يقال بأن النقطة $\boldsymbol{m\in X}$ بأنها نقطة غاية من النمط – $\boldsymbol{ii}$ لـ $\boldsymbol{(S,E)}$ **(limit point)** $\boldsymbol{ii-}$ اذا كان لكل مجموعة مفتوحة ناعمة من النمط – $\boldsymbol{ii}$ $\boldsymbol{(G,E)}$ تحوي $\boldsymbol{x}$ بحيث يتحقق الشرط $\boldsymbol{(S,E)\tilde{\cap}(G,E)\tilde{\setminus}\{m\}\neq\emptyset_E}$. المشتقة من النمط – $\boldsymbol{ii}$ لـ $\boldsymbol{(S,E)}$ $\boldsymbol{ii-}$) **derived set**) ويرمز لها بالرمز $\boldsymbol{II-D(S,E)}$ هي مجموعة كل نقاط الغاية من النمط – $\boldsymbol{ii}$ لـ $\boldsymbol{(S,E)}$.

تعريف6–4:[6] يقال للمجموعة الناعمة $\boldsymbol{(S,E)}$ في الفضاء $\boldsymbol{(X,\tau,E)}$ بأنها :

1. [3], [5]مجموعة مغلقة ناعمة من النمط – $\boldsymbol{ii}$ اذا تحقق احد الشرطين:

a) $(\boldsymbol{S},\boldsymbol{E}) \subseteq \boldsymbol{II}-\boldsymbol{D}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{E})$ بحيث $\boldsymbol{II}-\boldsymbol{D}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{E}) \subseteq \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})$, لكل $\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{E}$.

أو b) $(\boldsymbol{S},\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{sII}-\boldsymbol{Cl}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{E})$.

2. كثيفة بنفسها ناعمة من النمط $-\ \boldsymbol{ii}$ (Soft $\boldsymbol{II}-$ dence initself) اذا تحقق الشرط $\boldsymbol{II}-\boldsymbol{D}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{E}) \mathrel{\tilde{\supseteq}} (\boldsymbol{S},\boldsymbol{E})$ إذ إنَ $\boldsymbol{II}-\boldsymbol{D}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{E}) \subseteq \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})$ لكل $\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{E}$.

3. تامة ناعمة من النمط $-\ \boldsymbol{ii}$ (Soft $\boldsymbol{ii}-$ perfect set) اذا كانت $\boldsymbol{II}-\boldsymbol{D}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{E}) = (\boldsymbol{S},\boldsymbol{E})$ إذ ان $\boldsymbol{II}-\boldsymbol{D}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})$ لكل $\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{E}$, بعبارة أخرى $(\boldsymbol{S},\boldsymbol{E})$ يقال لها مجموعة تامة ناعمة من النمط $-\ \boldsymbol{ii}$ اذا كانت مغلقة ناعمة من النمط $-\ \boldsymbol{ii}$ وكثيفة بنفسها ناعمة من النمط $-\ \boldsymbol{ii}$.

مثال1−4: لتكن $\boldsymbol{X}=\{\boldsymbol{q},\boldsymbol{t},\boldsymbol{z}\}$,$\boldsymbol{E}=\{\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}\}$,$\boldsymbol{\tau}=\{\boldsymbol{\phi_E},(\boldsymbol{S_1},\boldsymbol{E}),(\boldsymbol{S_2},\boldsymbol{E}),(\boldsymbol{S_3},\boldsymbol{E}),\boldsymbol{X_E}\}$, بحيث أن :

$(S_1,E)=\{(r,\{q\}),(s,\{q\}),$
$(S_2,E)=\{(r,\{t\}),(s,\{t\})\},$
$(S_3,E)=\{(r,\{q,t\}),(s,\{q,t\})\}.$
$s-Os(X_E)=\{\phi_E,(S_1,E),(S_2,E),(S_3,E),X\},$
$s-Cs(X_E)=\{X,(S_1,E)^c=(S_4,E)=\{(r,\{t,z\}),(s,\{t,z\})\},(S_2,E)^c=(S_5,E)$
$=\{(r,\{q,z\}),(s,\{q,z\})\},(S_3,E)^c=(S_6,E)=\{(r,\{z\}),(s,\{z\})\},\phi_E.$
$\{\phi_E,(S_1,E),(S_2,E),(S_3,E),(S_4,E),(S_5,E),X\} \mathrel{\tilde{\in}} sI-Os(X_E)$
$\{\phi_E,(S_1,E),(S_2,E),(S_4,E),(S_5,E),(S_6,E),X\} \mathrel{\tilde{\in}} sII-Cs(X_E)$
$(S_L,E)=\{(r,\{q,z\}),(s,\{q,z\})\}$,$(S_K,E)=\{(r,\{q,t\}),(s,\{q,t\})\}$

1. $II-D(S_L,E)=\emptyset \mathrel{\tilde{\subseteq}} (S_L,E)$

من الواضح بأن (S_L,E) تعتبر مغلقة ناعمة من النمط $-\ ii$ لكنها ليست كثيفة بنفسها ناعمة من النمط$-\ ii$ لذلك (S_L,E) ليست مجموعة تامة ناعمة من النمط $-\ ii$.

2. $II-D(S_K,E)=\{z\} \mathrel{\tilde{\nsubseteq}} (S_K,E)$

من الواضح بأن (S_K,E) ليست مغلقة ناعمة من النمط $-\ ii$ وهي ليست كثيفة بنفسها ناعمة من النمط $-\ ii$ وبالتالي (S_K,E) ليست مجموعة تامة ناعمة من النمط $-\ ii$.

تعريف 7−4: [6] اذا كانت (S,E) مجموعة ناعمة في الفضاء (X,τ,E) فإن المجموعتين (S_1,E) و (S_2,E) تمثلان تفريقًا ناعمًا من النمط $-\ ii$ لـ (S,E) (soft $ii-$ disconnected) ويرمز لها بـ $(S,E)=\langle (S_1,E)|(S_2,E)\rangle$ اذا وفقط اذا تحققت الشروط الاتية :

1. $(S_1,E) \mathrel{\tilde{\neq}} \emptyset_E,\ (S_2,E) \mathrel{\tilde{\neq}} \emptyset_E$.
2. $(S_1,E)\tilde{\sqcap}(S_2,E)=\emptyset_E$.
3. $(S_1,E)\ \tilde{\sqcup}\ (S_2,E)=(S,E)$.
4. $(sII-Cl(S_1,E)\tilde{\sqcap}(S_2,E))\ \tilde{\sqcup}\ ((S_1,E)\tilde{\sqcap}sII-Cl(S_2,E))=\emptyset_E$.

تعريف 8−4:[6] يقال للمجموعة الناعمة (S,E) في الفضاء (X,τ,E) التي ليس لها تفريق ناعم من النمط $-ii$ بأنها مترابطة ناعمة من النمط $-ii$ (Soft $ii-$ connected set).

بعبارة أخرى, (S,E) يقال بأنها مترابطة ناعمة من النمط $-ii$ اذا كانت $\emptyset_E$ و X_E هما المجموعتان الوحيدتان المفتوحتان الناعمتان من النمط $-ii$ والمغلقتان الناعمتان من النمط $-ii$ في نفس الوقت في الفضاء (X,τ,E).

تعريف9−4: [6] لتكن $(S,E)\,\tilde{\in}\,SS(X_E)$ تسمى المجاميع الجزئية الناعمة من X $\{(J_\lambda,E)\}$ غطاء ناعم لـ (S,E) (Soft cover) اذا كان $(S,E)\,\tilde{\subseteq}\cup_\lambda (J_\lambda,E)$, اذا كانت جميع عناصر هذا الغطاء عبارة عن مجاميع مفتوحة ناعمة من النمط $-ii$, يسمى غطاءً مفتوحاً ناعماً من النمط $-ii$ لـ (S,E).

ملاحظة1−4:[6] اذا كان أي جزء من هذا الغطاء عبارة عن غطاء ايضًا لـ (S,E) فإنه يطلق علية غطاء جزئي منه. اذا كان هذا الفضاء الجزئي منته بحيث أن $(S,E)\,\tilde{\subseteq}\cup_{i=1}^{n} (J_i,E)$ فأنه يسمى غطاء جزئياً منتهياً منه لـ (S,E).

اذا كان من كل غطاء مفتوح ناعم من النمط $-ii$ لـ (S,E) يوجد غطاء جزئي ناعم منته منه لـ (S,E), فإن (S,E) تسمى مجموعة متراصة ناعمة من النمط $-ii$ (Soft $ii-$ compact set). يكون الفضاء (X,τ,E) فضاء تبولوجياً متراصاً ناعماً من النمط $-ii$ اذا كانت X متراصة ناعمة من النمط $-ii$.

تعريف10−4: [16] اذا كان (X,τ,E) فضاء تبولوجي ناعم $(S,E)\,\tilde{\in}\,SS(X_E)$. تعرف $\tau_{(S,E)}$ بالشكل $\{(G,E)\,\tilde{\cap}\,(S,E):(G,E)\,\tilde{\in}\,\tau\}$ بأنه تبولوجيا ناعمة على (S,E). يقال لهذه التبولوجيا الناعمة بأنها تبولوجيا نسبية ناعمة ويرمز لها $((S,E),\tau_{(S,E)})$ ويسمى الفضاء الجزئي الناعم أو التبولوجيا النسبية الناعمة لـ τ على (S,E) في الفضاء (X,τ,E).

مبرهنة **1−4:[6]** أي مجموعة مترابطة ناعمة من النمط $-ii$ في الفضاء التبولوجي النسبي الجزئي الناعم (X^*,τ^*,E) تكون مترابطة ناعمة من النمط $-ii$ في الفضاء (X,τ,E).

البرهان: نفرض أن $X\,\tilde{\subseteq}\,X^*\,\tilde{\subseteq}\,(S,E)$. الان اذا كانت (S_1,E) و (S_2,E) عبارة عن مجموعتين ناعمتين غير خاليتين ومختلفتين بحيث أن $(S_1,E)\,\tilde{\cup}\,(S_2,E)=(S,E)$ نحصل على:

$$(\boldsymbol{S_1},\boldsymbol{E}),(\boldsymbol{S_2},\boldsymbol{E})\,\tilde{\subseteq}\,(\boldsymbol{S},\boldsymbol{E})\,\tilde{\subseteq}\,\boldsymbol{X}^*\,\tilde{\subseteq}\,\boldsymbol{X}.$$

$$(\boldsymbol{sII-Cl}(\boldsymbol{S_1},\boldsymbol{E})\tilde{\cap}(\boldsymbol{S_2},\boldsymbol{E}))\,\tilde{\cup}\,((\boldsymbol{S_1},\boldsymbol{E})\tilde{\cap}\boldsymbol{sII-Cl}(\boldsymbol{S_2},\boldsymbol{E}))$$

$$=(\boldsymbol{sII-Cl}(\boldsymbol{S_1},\boldsymbol{E})\tilde{\cap}\boldsymbol{X}^*\tilde{\cap}(\boldsymbol{S_2},\boldsymbol{E}))\,\tilde{\cup}\,((\boldsymbol{S_1},\boldsymbol{E})\tilde{\cap}\boldsymbol{X}^*\tilde{\cap}\boldsymbol{sII-Cl}(\boldsymbol{S_2},\boldsymbol{E}))$$

$$=(\boldsymbol{sII-Cl}^*(\boldsymbol{S_1},\boldsymbol{E})\tilde{\cap}(\boldsymbol{S_2},\boldsymbol{E}))\,\tilde{\cup}\,((\boldsymbol{S_1},\boldsymbol{E})\tilde{\cap}\boldsymbol{sII-Cl}^*(\boldsymbol{S_2},\boldsymbol{E})).$$

الآن اذا كانت (S,E) مترابطة ناعمة من النمط $-ii$ في (X,τ,E) عندئذ فأن :

$$(sII-Cl(S_1,E)\tilde{\cap}(S_2,E))\,\tilde{\cup}\,((S_1,E)\tilde{\cap}sII-Cl(S_2,E))\neq\emptyset$$

اذا,

$$(sII-Cl^*(S_1,E)\tilde{\cap}(S_2,E))\,\tilde{\cup}\,((S_1,E)\tilde{\cap}sII-Cl^*(S_2,E))\neq\emptyset$$

نستنتج ان (S,E) مجموعة مترابطة ناعمة من النمط $-ii$ في الفضاء (X^*,τ^*,E).

وبنفس الطريقة اذا كانت (S,E) مجموعة مترابطة ناعمة من النمط $-ii$ في الفضاء (X^*,τ^*,E) عندئذ

$$(sII-Cl^*(S_1,E)\tilde{\cap}(S_2,E))\,\tilde{\cup}\,((S_1,E)\tilde{\cap}sII-Cl^*(S_2,E))\neq\emptyset$$

اذا, $.(sII-Cl(S_1,E)\widetilde{\sqcap}(S_2,E))\ \widetilde{\sqcup}\ ((S_1,E)\widetilde{\sqcap}sII-Cl(S_2,E))\neq\emptyset$

نستنتج أن (S,E) مجموعة مترابطة ناعمة من النمط $ii-$ في الفضاء (X,τ,E) ■

مبرهنة **2-4:[6]** اذا كان (X,τ,E) فضاء تبولوجياً ناعماً فإن $X_E=\langle(S_1,E)|(S_2,E)\rangle$, اذا وفقط اذا كانت (S_1,E) و (S_2,E) مجموعتان مختلفتان غير خاليتان مغلقتان ومفتوحتان ناعمتان من النمط $ii-$ جزئية من X واتحادها يساوي X.

البرهان: 1. نفرض أن $X_E=\langle(S_1,E)|(S_2,E)\rangle$ نحصل على (S_1,E) و (S_2,E) مجموعتان ناعمتان غير خاليتان جزئيتان من X بحيث أن:

$, (S_1,E)\ \widetilde{\sqcup}\ (S_2,E)=X_E,(S_1,E)\widetilde{\sqcap}(S_2,E)=\emptyset_E$

وأيضًا, $\boldsymbol{, (S_1,E)\widetilde{\sqcap}sII-Cl(S_2,E))=\emptyset_E.sII-Cl(S_1,E)\widetilde{\sqcap}(S_2,E)=\emptyset_E}$

الآن, بما أن $(S_1,E)\widetilde{\sqcap}sII-Cl(S_2,E))=\emptyset_E$ نحصل على (S_2,E) تحوي كل نقاط الغاية من النمط $ii-$ عندئذ فإن (S_2,E) هي مغلقة ناعمة من النمط $ii-$. وطريقة مماثلة, (S_1,E) هي مغلقة ناعمة من النمط $ii-$.

بما أن $(S_2,E)=(S_1,E)^C$ نحصل على (S_1,E) هي مفتوحة ناعمة من النمط $ii-$. بصورة مماثلة, (S_2,E) هي مفتوحة ناعمة من النمط $ii-$.

2. نفرض أن (S_1,E) و (S_2,E) مجموعتان ناعمتان مختلفتان غير خاليتان جزئية من X كل منهما مفتوحة ناعمة ومغلقة ناعمة من النمط $ii-$, واتحادهما يساوي X . نحصل على :

$, (S_2,E)\neq\emptyset_E, (S_1,E)\widetilde{\sqcap}(S_2,E)=\emptyset_E(S_1,E)\neq\emptyset_E$

بما أن (S_1,E) و (S_2,E) مفتوحتان ناعمتان ومغلقتان ناعمتان من النمط $ii-$ نحصل على $(S_2,E)=(S_1,E)^C$ و $.\ (S_1,E)^C\ \widetilde{\sqcup}\ (S_1,E)=(S_1,E)\ \widetilde{\sqcup}\ (S_2,E)=X_E$

بما أن (S_1,E) مغلقة ناعمة من النمط $ii-$, نحصل على $sII-Cl(S_1,E)=(S_1,E)$ عندئذ يكون لدينا $sII-$ $.\ Cl(S_1,E)\widetilde{\sqcap}(S_2,E)=\emptyset_E$

بنفس الطريقة $(S_1,E)\widetilde{\sqcap}sII-Cl(S_2,E))=\emptyset_E$ نستنتج أن $X_E=\langle(S_1,E)|(S_2,E)\rangle$ ■

مبرهنة **3-4:[6]** يقال للمجموعة $X\ \widetilde{\sqsubseteq}\ X^*\ \widetilde{\sqsubseteq}\ (S,E)$, بأنها متراصة ناعمة من النمط $ii-$ في الفضاء (X,τ,E) اذا وفقط اذا كانت متراصة ناعمة من النمط $ii-$ في الفضاء الجزئي الناعم (X^*,τ^*,E).

البرهان: نفرض أن (S,E) هي متراصة ناعمة من النمط $ii-$ في الفضاء الجزئي الناعم (X^*,τ^*,E).

لتكن $\{(J_\lambda,E)\}$ غطاء جزئي مفتوح ناعم من النمط $ii-$ لـ (S,E) في (X,τ,E), فإن $(S,E)\ \widetilde{\sqsubseteq}\sqcup_\lambda (J_\lambda,E)$ حيث,

$(S,E)=(S,E)\ \widetilde{\sqcap}\ X^*\ \widetilde{\sqsubseteq}\ (\sqcup_\lambda (J_\lambda,E))\ \widetilde{\sqcap}\ X^*=\sqcup_\lambda ((J_\lambda,E)\ \widetilde{\sqcap}\ X^*)=\sqcup_\lambda (J^*_\lambda,E).$

نحصل على, $\{(J^*_\lambda,E)\}$ غطاء جزئي مفتوح ناعم من النمط $ii-$ لـ (S,E) في الفضاء (X^*,τ^*,E) (بالفرض). لذلك يوجد غطاء جزئي منته ناعم منه بحيث,

$, (S,E)\ \widetilde{\sqsubseteq}\sqcup_{i=1}^{n} ((J_i\ ,E)\ \widetilde{\sqcap}\ X^*)\ \widetilde{\sqsubseteq}\sqcup_{i=1}^{n} ((J_i\ ,E).(S,E)\ \widetilde{\sqsubseteq}\sqcup_{i=1}^{n} (J^*_i,E)$

نستنتج أن, (S,E) متراصة ناعمة من النمط $ii-$ في الفضاء (X,τ,E) ■

العكس: نفرض بأن (S,E) متراصة ناعمة من النمط $ii-$ في الفضاء (X,τ,E) و $\{(J_{\lambda}^{*},E)\}$ غطاء جزئي مفتوح ناعم لـ (S,E) في الفضاء (X^{*},τ^{*},E) فيكون $(S,E)\,\tilde{\subseteq}\cup_{\lambda}(J_{\lambda}^{*},E)$.

بواسطة التعريف "10−4" , نحصل على $(J_{\lambda}^{*},E)=(J_{\lambda},E)\,\tilde{\cap}\,X^{*}$ لكل λ, لدينا $\{(J_{\lambda},E)\}$ غطاء جزئي مفتوح ناعم من النمط $ii-$ لـ (S,E) في الفضاء (X,τ,E), بسبب

$(S,E)\,\tilde{\subseteq}\cup_{\lambda}(J_{\lambda}^{*},E)=\cup_{\lambda}((J_{\lambda},E)\,\tilde{\cap}\,X^{*})=(\cup_{\lambda}(J_{\lambda},E))\,\tilde{\cap}\,X^{*}\,\tilde{\subseteq}\cup_{\lambda}(J_{\lambda},E).$

بما أن (S,E) متراصة ناعمة من النمط $ii-$ في الفضاء (X,τ,E) , نحصل على $(S,E)\,\tilde{\subseteq}\cup_{i=1}^{n}((J_{i},E)$. الان,

$(S,E)=(S,E)\,\tilde{\cap}\,X^{*}\,\tilde{\subseteq}\,(\cup_{i=1}^{n}((J_{i},E))\,\tilde{\cap}\,X^{*}=\cup_{i=1}^{n}((J_{i},E)\,\tilde{\cap}\,X^{*})=\cup_{i=1}^{n}(J_{i}^{*},E).$

اذا (S,E) متراصة ناعمة من النمط $ii-$ في الفضاء (X^{*},τ^{*},E).

5. الجانب العملي للمجاميع الناعمة والتبولوجيا الناعمة : تطبيق لمجاميع ناعمة

الخطوة (1)[6] : نستخدم المجموعة الناعمة والتبولوجيا الناعمة في هذا التطبيق لحساب تكلفة مشاريع البنية التحتية التي سيتم انجازها في العديد من المناطق السكنية في ناحية بعشيقة وقراها وكذلك العثور على العديد من معلومات البيانات التي نطلبها .

نفرض X تمثل بعض الأحياء السكنية في المدينة المدروسة

$X=\{z_{1}=R_{1},z_{2}=R_{2},z_{3}=R_{3},z_{4}=R_{4},z_{5}=R_{5},z_{6}=R_{6},z_{7}=R_{7},\dots,z_{n}=R_{n}$

$W=w_{1}=$ المشروع الاول , $w_{2}=$ المشروع الثاني, $w_{3}=$ المشروع الثالث, $w_{4}=$ المشروع الرابع,

$w_{5}=$ المشروع الخامس , $w_{6}=$ المشروع السادس, ..., $w_{k}=$ المشروع k

W تمثل مشاريع البنية التحتية التي يتعين انجازها في المدينة أو البلدة المدروسة.

C_{j} تشير الى تكلفة المشروع j , z_{ij} يشير الى عدد المشروع j في المنطقة i,

M_{j} يشير الى تكاليف المشروع j في جميع المناطق i, L_{i} يشير الى مجموع تكاليف المشاريع في المنطقة i,

إذ إنَ $i=1,2,\dots,n$, $j=1,2,\dots,k$, $n\neq k$ كما أن n يمثل عدد المناطق و k يمثل عدد المشاريع.

C_{j}	C_{1}	C_{2}	C_{3}	…	C_{k}	L_{i}
X/W	w_{1}	w_{2}	w_{3}	…	w_{k}	$L_{i}=\sum_{j}z_{ij}.C_{j}$
z_{1}	z_{11}	z_{12}	z_{13}	…	z_{1k}	L_{1}
z_{2}	z_{21}	z_{22}	z_{23}	…	z_{2k}	L_{2}
z_{3}	z_{31}	z_{32}	z_{33}	…	z_{3k}	L_{3}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
z_{n}	z_{n1}	z_{n2}	z_{n3}	…	z_{nk}	L_{n}
$M_{j}=C_{j}.\sum_{ij}z_{ij}$	M_{1}	M_{2}	M_{3}	…	M_{k}	$\sum_{i=1}^{n}L_{i}=\sum_{j=1}^{k}M_{j}$

يمثل هذا الجدول المجموعة الناعمة (S,W) التي تحسب تكلفة مشاريع البنية التحتية في n من المناطق السكنية في المدينة او البلدة قيد الدراسة.

الخطوة (2) نقوم بإنشاء التبولوجيا الناعمة من المجاميع الناعمة :

$\tau = \{\emptyset, X, (S_1, W), (S_2, W), (S_3, W), \dots, (S_n, W), (S_{n+1}, W),$
$\{(w_1, \{z_1, z_2\}), (w_2, \{z_1, z_2\}), (w_3, \{z_1, z_2\}), \dots, (w_k, \{z_1, z_2\})\}, \dots,$
$\{(w_1, \{z_1, z_3\}), (w_2, \{z_1, z_3\}), (w_3, \{z_1, z_3\}), \dots, (w_k, \{z_1, z_3\})\}, \dots,$
$\{(w_1, \{z_2, z_3\}), (w_2, \{z_2, z_3\}), (w_3, \{z_2, z_3\}), \dots, (w_k, \{z_2, z_3\})\}, \dots,$
$\{(w_1, \{z_{n-1}, z_n\}), (w_2, \{z_{n-1}, z_n\}), (w_3, \{z_{n-1}, z_n\}), \dots, (w_k, \{z_{n-1}, z_n\})\}\}.$

حيث, $(S_1, W) = \{(w_1, \{z_1\}), (w_2, \{z_1\}), (w_3, \{z_1\}), \dots, (w_k, \{z_1\})\}$

(S_1, W) تحسب تكلفة مشاريع البنية التحتية المراد إنجازها في المنطقة السكنية الاولى z_1 في المدينة المدروسة والتي تساوي

$\dots (S_2, W) = (z_{11} * C_1) + (z_{12} * C_2) + (z_{13} * C_3) + \dots + (z_{1k} * C_k) = L_1$ (1)

$\{(w_1, \{z_2\}), (w_2, \{z_2\}), (w_3, \{z_2\}), \dots, (w_k, \{z_2\})\}$

(S_2, W) تحسب تكلفة المشاريع البنية التحتية التي سيتم إنجازها في المنطقة السكنية الثانية z_2 في المدينة المدروسة والتي تساوي

$(z_{21} * C_1) + (z_{22} * C_2) + (z_{23} * C_3) + \dots + (z_{2k} * C_k) = L_2 \dots$ (2)

$(S_3, W) = \{(w_1, \{z_3\}), (w_2, \{z_3\}), (w_3, \{z_3\}), \dots, (w_k, \{z_3\})\}$

(S_3, W) تحسب تكلفة المشاريع البنية التحتية التي سيتم إنجازها في المنطقة السكنية الثالثة z_3 في المدينة المدروسة والتي تساوي

$\dots (z_{31} * C_1) + (z_{32} * C_2) + (z_{33} * C_3) + \dots + (z_{3k} * C_k) = L_3$ (3)

$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$

$(S_n, W) = \{(w_1, \{z_n\}), (w_2, \{z_n\}), (w_3, \{z_n\}), \dots, (w_k, \{z_n\})\}$

(S_n, W) تحسب تكلفة المشاريع البنية التحتية التي يتعين إنجازها في المنطقة السكنية z_n في المدينة المدروسة والتي تساوي

$\dots \quad (z_{n1} * C_1) + (z_{n2} * C_2) + (z_{n3} * C_3) + \dots + (z_{nk} * C_k) = L_n (n)$

التكلفة لمشاريع البنية التحتية والتي سيتم إنجازها في n من المناطق $(z_1, z_2, z_3, \dots, z_n)$ في المدينة المدروسة والتي تساوي

$L_1, L_2, L_3 + \dots + L_n = \sum_{i=1}^{n} L_i$

نفرض أن $(S_{n+1}, W) = \{(w_1, \{z_1, z_2, z_3, \dots, z_n\}), (w_2, \{z_1, z_2, z_3, \dots, z_n\}), (w_3, \{z_1, z_2, z_3, \dots, z_n\}),$
$, \dots, (w_k, \{z_1, z_2, z_3, \dots, z_n\})\}$

(S_{n+1}, W) تحسب تكلفة مشاريع البنية التحتية التي يتعين إنجازها في n من المناطق السكنية $(z_1, z_2, z_3, \dots, z_n)$ في المدينة المدروسة والتي تساوي :

$$C_1.(z_{11} + z_{21} + z_{31} + \dots + z_{n1}) + C_2.(z_{12} + z_{22} + z_{32} + \dots + z_{n2})$$
$$\dots (n+1) + C_3.(z_{13} + z_{23} + z_{33} + \dots + z_{n3}) + \dots + C_k.(z_{1k} + z_{2k} + z_{3k} + \dots + z_{nk})$$
$$= M_1 + M_2 + M_3 + \dots + M_k = \sum_{j=1}^{k} M_j$$

والتي تساوي $\sum_{i=1}^{n} L_i$.

وعلى سبيل المثال نقدم التطبيق التالي (1)"

مثال الخطوة الاولى : نستخدم المجموعة الناعمة والتبولوجيا الناعمة في هذا المثال لحساب تكلفة البنية التحتية للمشاريع المتعين انجازها في عدة مناطق من بلدة بعشيقة في محافظة نينوى, بالإضافة الى تحديد العديد من معلومات البيانات التي نحتاجها. نفرض X تمثل بعض الاحياء السكنية في مدينة بعشيقة وتوابعها ,

$X = \{z_1 =$ بعشيقة , $z_2 =$ الدراويش, $z_3 =$قرية بايبوخت , $z_4 =$قرية الفاضلية , $z_5 =$قرية عمر قابجي$\}$.

$W = \{w_1 =$ تبليط واكساء طرق مختلفة , $w_2 =$ بناء مدارس, $w_3 =$ بناء مراكز صحية , $w_4 =$ مد شبكات مياه .

يمثل W مشاريع البنية التحتية التي سيتم انجازها في بلدة بعشيقة

حيث, $i = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $j = \{1, 2, 3, 4\}$, عدد المناطق $= \mathbf{5} = n$, عدد المشاريع $= 4 = k$

C_j	3379963500	5086000000	750000000	241000000	L_i
X/W	w_1	w_2	w_3	w_4	$L_i=\sum_j z_{ij}.C_j$
z_1	2	0	0	0	6759927000
z_2	1	1	1	0	9215963500
z_3	1	1	1	1	9456963500
z_4	1	2	0	1	13792963500
z_5	1	1	0	1	8706963500
$M_j = C_j.\sum_{ij} z_{ij}$	$M_1 = 20279781000$	$M_2 = 25430000000$	$M_3 = 1500000000$	$M_4 = 723000000$	$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5 = 47932781000$

يمثل الجدول السابق مجموعة ناعمة (S, W) تحسب تكلفة مشاريع البنية التحتية التي انجزت في خمس مناطق سكنية في محافظة نينوى من بلدة بعشيقة.

الخطوة الثانية: نقوم بإنشاء التبولوجيا الناعمة من المجاميع الناعمة

$$\tau = \{\emptyset, X, (S_1, W), (S_2, W), (S_3, W), (S_4, W), (S_5, W), (S_6, W),$$
$$,(w_4, \{z_1, z_2\})\},\{(w_1, \{z_1, z_2\}), (w_2, \{z_1, z_2\}), (w_3, \{z_1, z_2\})$$
$$\ldots\{(w_1, \{z_1, z_3\}), (w_2, \{z_1, z_3\}), (w_3, \{z_1, z_3\}), (w_4, \{z_1, z_3\})\},$$
$$\{(w_1, \{z_3, z_5\}), (w_2, \{z_3, z_5\}), (w_3, \{z_3, z_5\}), (w_4, \{z_3, z_5\})\},$$
$$\}.\{(w_1, \{z_4, z_5\}), (w_2, \{z_4, z_5\}), (w_3, \{z_4, z_5\}), (w_4, \{z_4, z_5\})\}$$

اذ ان,
$$(S_1, W) = \{(w_1, \{z_1\}), (w_2, \{z_1\}), (w_3, \{z_1\}), (w_4, \{z_1\})\}$$

(S_1, W) تحسب تكلفة البنية التحتية المعين انجازها في المنطقة السكنية الأولى z_1 في ناحية بعشيقة والتي تساوي

$$L_1 = (2 * 3379963500) + (0 * 5086000000) + (0 * 750000000) + (0 * 241000000) = 6759927000.$$

$$(S_2, W) = \{(w_1, \{z_2\}), (w_2, \{z_2\}), (w_3, \{z_2\}), (w_4, \{z_2\})\}$$

(S_2, W) تحسب تكلفة البنية التحتية المعين انجازها في المنطقة السكنية الثانية z_2 في ناحية بعشيقة والتي تساوي

$$L_2 = (1 * 3379963500) + (1 * 5086000000) + (1 * 750000000) + (0 * 241000000) = 9215963500.$$

$$(S_3, W) = \{(w_1, \{z_3\}), (w_2, \{z_3\}), (w_3, \{z_3\}), (w_4, \{z_3\})\}$$

(S_3, W) تحسب تكلفة البنية التحتية المعين انجازها في المنطقة السكنية الثالثة z_3 في ناحية بعشيقة والتي تساوي

$$L_3 = (1 * 3379963500) + (1 * 5086000000) + (1 * 750000000) + (1 * 241000000)$$
$$= 9456963500.$$

$$(S_4, W) = \{(w_1, \{z_4\}), (w_2, \{z_4\}), (w_3, \{z_4\}), (w_4, \{z_4\})$$

(S_4, W) تحسب تكلفة البنية التحتية المعين انجازها في المنطقة السكنية الرابعة z_4 في ناحية بعشيقة والتي تساوي

$$L_4 = (1 * 3379963500) + (2 * 5086000000) + (0 * 750000000) + (1 * 241000000)$$
$$= 13792963500.$$

$$(S_5, W) = \{(w_1, \{z_5\}), (w_2, \{z_5\}), (w_3, \{z_5\}), (w_4, \{z_5\})$$

(S_5, W) تحسب تكلفة البنية التحتية المعين انجازها في المنطقة السكنية الخامسة z_5 في ناحية بعشيقة والتي تساوي

$$L_5 = (1 * 3379963500) + (1 * 5086000000) + (0 * 750000000) + (1 * 241000000)$$
$$= 8706963500.$$

تكلفة مشاريع البنية التحتية التي يتعين انجازها في المناطق السكنية الخمسة $(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5)$ في ناحية بعشيقة, والتي تعادل :

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 = 6759927000 + 9215963500 + 9456963500 + 13792963500 + 8706963500$$
$$= 4793278100.$$

$$(S_6, W) = \{(w_1, \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}), (w_2, \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}), (w_3, \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\})$$
$$. \quad , (w_4, \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\})\}$$

(S_6, W) تحسب تكلفة مشاريع البنية التحتية التي يتعين انجازها في المناطق السكنية الخمسة $(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5)$ في ناحية بعشيقة والتي تعادل ,

$$C_1.(z_{11} + z_{21} + z_{31} + z_{41} + z_{51}) + C_2.(z_{12} + z_{22} + z_{32} + z_{42} + z_{52})$$
$$+C_3.(z_{13} + z_{23} + z_{33} + z_{43} + z_{53}) + C_k.(z_{14} + z_{24} + z_{34} + z_{44} + z_{54}) =$$
$$(((2 + 1 + 1 + 1 + 1) * 3379963500)) + ((0 + 1 + 1 + 2 + 1) * 5086000000))$$
$$+ \left((0 + 1 + 1 + 0 + 0) * 750000000\right)) + ((0 + 0 + 1 + 1 + 1) * 241000000)))$$
$$M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = 47932781000. =$$

والتي تساوي مجموع التكاليف التي تحسب بواسطة $(S_1, W), (S_2, W), (S_3, W), (S_4, W), (S_5, W)$ والتي تساوي

$.L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5$

الاستنتاجات

المثال المذكور أعلاه أظهر أنه من الممكن استخدام مبرهنة المجاميع الناعمة التي اوضحنا جزءًا منها في الجزء النظري في العديد من المجالات في الحياة العلمية والواقعية مما يجعل العمل سهل وممتع ومنتج وفعال وأسرع.

شكر وتقدير

المؤلفون ممتنون لجامعة الموصل, كلية التربية للعلوم الصرفة للمساعدة المقدمة لهم. من تسهيلات من الاحصائيات وما شابه ذلك.

References

[1] B. Ahmad & A. Kharal, “Mappings on Soft Classes”, *New Math, Nat. Comp.,* vol.7, no.3, pp. 471-481, (2011). DOI: https://doi.org/10.1142/S1793005711002025

[2] M. I., Ali, F. Feng, X. Liu, W. K. Min and M. Shabir, "On Some New Operations in Soft Set Theory", *Comp. Math. App.,* vol.57, no.9, pp. 1547-1553, (2009). https://doi.org/10.1016/j.camwa.2008.11.009

[3] S.W., Askandar and A.A. Mohammed, "Soft ii-Open Sets in Soft Topological Spaces", *Open Access Library Journal*, vol.7, no.5, pp. 1-18, (2020). 10.4236/oalib.1106308

[4] S.W., Askandar and A.A. Mohammed, "i-Soft Separation Axioms in Soft Topological Spaces", *Tikrit Journal of Pure Science*, vol.25, no.6, pp. 130-138, (2020).

[5] S.W. Askandar, and A.A. Mohammed, "Soft ii-Mappings in Soft Topological Spaces", *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, N47, pp. 240-257, (2022).

[6] S.W., Askandar, "Computing the Cost of Service Projects in Telkaif Town Using Soft Sets and Soft Topology". *Technium*, vol.4, no.9, pp.53-61, (2022).

[7] A., Ayguoglu and H. Aygun, "Some Notes on Soft Topological Spaces", Neural Computer Appl., pp. 1-7, (2011). DOI: https://doi.org/10.1007/s00521-011-0722-3

[8] N., Cagman, S. Karatas, and S., Enginoglu, "Soft Topology", *Comp. Math. Appl.*, vol.62, pp. 351-358, (2011). DOI: https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.05.016

[9] S., El-Sheikh and A. A., El-Latif, "Characterization of b-Open Soft Sets in Soft Topological Spaces", *Journal of New Theory*, vol.2, pp. 8-18, (2015).

[10] D.N. Georgiou and A.C. Megaritis, “Soft Set Theory and Topology”, *Applied General Topology,* vol.15, no.1 , pp.93-109, (2014).DOI: https://doi.org/10.4995/agt.2014.2268

[11] S. Hussain, and B. Ahmad, "Some Properties of Soft Topological Spaces", *Computers and Mathematics with Applications*, vol.62, no.11, pp. 4058-4067, (2011). DOI: https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.09.051

[12] M. H., Mahmood, "Real Life Applications on Soft Sets and Soft Topology", Ph.D. Thesis, University of Al-Mustansiriya, Iraq, (2015).

[13] P. K., Maji, R., Biswas and A. R., Roy, "Soft Set Theory", *Comp. Math., App.*, vol.45, no.4, pp. 555-562, (2003). DOI: https://doi.org/10.1016/S0898-1221(03)00016-6

[14] A.A., Mohammed and S.W., Askandar, "*i*-Open Sets in Bi-Topological Spaces, *AL Rafidain Journal of Computer Sciences and Mathematics*, vol.12, no.1, pp. 13-23, (2018).

[15] D.A. Molodtsov, "Soft Set Theory-First Results", *Comp. Math. App.*, vol.37, no.4, pp. 19-31, (1999). DOI: https://doi.org/10.1016/S0898-1221(99)00056-5

[16] S. Nazmal, and S. Samanta, "Neighborhood properties of soft topological spaces", *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics,* vol.6, no.1, pp. 1-15, (2013).

[17] E. Peyghan, B. Samadi & A. Tayebi, "Some Results Related to Soft Topological Spaces" *Journal Facta Universities, Ser. Math. Information*, vol.29, no.4, pp.325-336, (2014).

[18] M. Shabir & M. Naz, "On Soft Topological Space", *Comp. Math. App*., vol.61, no.7, pp.1786-1799. (2011). DOI: https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.02.006

[19] I. Zorlutuna, M. Akdag, W. Min & S. Atmaca, "Remarks on Soft Topological Spaces", *Annals of fuzzy mathematics and informatics,* vol.3, no.2, pp.171-185, (2012).

دراسة ميدانية باستخدام بعض خصائص وتطبيقات المجاميع المفتوحة الناعمة من النمط - *ii*

افين باسل داود [1]، صبيح وديع اسكندر [*2]

[1،2*] قسم الرياضيات، كلية التربية للعلوم الصرفة، جامعة الموصل، الموصل، العراق

المستخلص

قدمنا في هذا البحث طريقة جديدة لجمع البيانات وإجراء العمليات الحسابية عليها للحصول على النتائج المطلوبة بشكل مختلف عن السابق, في البداية سنعرف أصنافا جديدة من المجاميع الناعمة في الفضاءات التبولوجية الناعمة مع شرح العديد من الخصائص مثل الكثافة الناعمة من النمط $- ii$, والتمامية الناعمة من النمط $- ii$, والتراص الناعم من النمط $- ii$. إذ برهنا أن (أي مجموعة مترابطة ناعمة من النمط $- ii$ في الفضاء التبولوجي الجزئي الناعم (X^*, τ^*, E) تكون مترابطة ناعمة من النمط $- ii$ في الفضاء (X, τ, E))، علاوة على ذلك استخدمنا مفهوم التبولوجيا الناعمة في حساب تكلفة المشاريع الخدمية في عدة مناطق من بلدة بعشيقة التابعة لمحافظة نينوى شمال العراق سواء كانت المشاريع لمنطقة أو عدة مناطق باستخدام مبرهنة المجاميع الناعمة في الفضاءات التبولوجية الناعمة . حيث اخذت مشاريع البنية التحتية في مناطق بعشيقة المركز, الدراويش, بايبوخت, وقرى الفاضلية وعمر قابجي. مثل تبليط وإكساء طرق مختلفة, في بناء المدارس, والمراكز الصحية ومد شبكات المياه الجوفية.