Stability Analysis of Anonlinear Autoregressive Model of First Order

Abdulghafoor Gasim Salim **Abeer Abdulkhaliq Ahmed**
drabdul_salim@uomosul.edu.iq *abeerdabagh1@gmail.com*
College of Computer Sciences and Mathematics
University of Mosul, Mosul, Iraq

Received on: 02/01/2013 **Accepted on 03/04/2013**

ABSTRACT

In this paper, we study the moment of a non linear – autoregressive polynomial model of first order, also we analysis the stability of this model and find the singular point as well as the limit cycle by using the linear approximation technique.

Keywords: the singular point, the limit cycle, the linear approximation technique

تحليل إستقرارية أنموذج أنحدار ذاتي غير خطي من المرتبة الأولى

عبد الغفور جاسم سالم ***عبير عبد الخالق احمد***
قسم الرياضيات
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
جامعة الموصل، الموصل، العراق

تاريخ استلام البحث: 2013\01\02 **تاريخ قبول البحث: 2013\04\03**

الملخص

تم في هذا البحث دراسة العزوم لأنموذج الأنحدار الذاتي غير الخطي متعدد الحدود من المرتبة الأولى وكذلك تم تحليل إستقرارية هذا الأنموذج وإيجاد النقطة الثابتة ودورة النهاية باستخدام تقنية التقريب الخطية.

الكلمات المفتاحية: النقطة المنفردة، دورة النهاية، طريقة التقريب بالخطية المحلية.

1- المقدمة

السلاسل الزمنية هي سجل للقيم لأي كمية متقلبة تقاس بنقاط مختلفة من الزمن. على سبيل المثال قياس درجات الحرارة اليومية ، قياس الفولطية للدائرة الكهربائية لكل ثأنية واحدة ، قياس مؤشرات الأسعار لكل شهر ... الخ.[8]

عادة تبنى السلاسل الزمنية على ميزات أساسية متمثلة بالإستقرارية (stability) والخطية (linearity) والطبيعية (normality) وكيفية معالجة السلاسل الزمنية غير المراوحة لبناء نماذج رياضية ملائمة لها ، سيتركز بحثنا على دراسة إستقرارية احد النماذج غير الخطية (المتعدد الحدود من المرتبة الأولى).وبما أن هذا الأنموذج يمتلك عادة سلوكية غير خطية لذا تم استخدام طريقة التقريب الخطية المقترحة من قبل الباحث اوزاكي لدراسة صفات الأنموذج. لاحظ المصدر [10]

2- تعاريف أساسية

1-2 المتسلسلة الزمنية(time series)[4]

هي مجموعة من المشاهدات التي تتولد على التوالي خلال الزمن ، وتتميز أي سلسلة زمنية بأن بيأناتها مرتبة بالنسبة للزمن وأن المشاهدات المتتالية عادة تكون غير مستقلة أي تعتمد على بعضها البعض. وتعرف العملية التصادفية بأنها عائلة من المتغيرات العشوائية $\{x_t , t\in T\}$ حيث t هو الدليل $(t\in T)$ و T مجموعة دليلية (index set) وإذا كانت t تمثل الزمن فتسمى $\{x_t , t\in T\}$ متسلسلة زمنية .

2-2 نماذج الأنحدار الذاتي والأوساط المتحركة[8]

Autoregressive moving average model ARMA(p,q)

لتكن $\{X_t\}$ متسلسلة زمنية يعرف أنموذج الأنحدار الذاتي والاوساط المتحركة بالشكل الآتي :

$$X_t = f(X_{t-1}, \dots , X_{t-p} , Z_{t-1}, \dots , Z_{t-q}) + Z_t \qquad \dots \quad (1)$$

إذ أن z(t) الضوضاء الأبيض (الضجيج الأبيض) وتتبع التوزيع الطبيعي بمعدل صفر وتباين σ_z^2, f(.) هي أي دالة خطية ام غير خطية . وبفرض حالات معينة للدالة f(.) يمكننا الحصول على نماذج مختلفة . فإذا كانت f(.) دالة خطية يمكن كتابة المعادلة (1) بالشكل الآتي :

$$X_t = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i X_{t-i} + \sum_{i=1}^{q} b_i Z_{t-i} + Z_t \qquad (2) \quad \dots$$

إذ أن a_i و b_i ثوابت و Z_t معرفة مسبقا. يطلق على المعادلة (2) بأنموذج الانحدار الذاتي والأوساط المتحركة الخطي.فإذا كانت p=0 في المعادلة (2) نحصل على أنموذج أوساط متحركة من المرتبة q (MA(q)),وإذا كانت q=0 نحصل على أنموذج أنحدار ذاتي من المرتبة p (AR(p)) .

3- أنموذج متعدد الحدود للانحدار الذاتي والأوساط المتحركة:[8]

لتكن $\{x_{(t)}\}$ متسلسلة زمنية ، $\{z_t\}$ضجيج ابيض . و لنفترض أن f(.) متعدد حدود كما في المعادلة :

$$x_{(t)} = f(x_{(t-1)},, x_{(t-p)}, z_{(t-1)},..., z_{(t-p)}) + z_t \qquad \dots \quad (3)$$

أي ان :

$$x_{(t)} = p(x_{(t-1)},..., x_{(t-p)}, z_{(t-1)},..., z_{(t-q)}) + z_{(t)} \qquad \dots \quad (4)$$

إذ إن p(.) هي متعددة حدود للمتغيرات X_{t-p}, ... ,X_{t-1}, $Z_{t-1},\dots,Z_{t-q}$, يسمى الانموذج المعرف في المعادلة (4) بانموذج متعدد الحدود للانحدار الذاتي والأوساط المتحركة.

4-2 أنموذج الانحدار الذاتي من المرتبة الأولى غير الخطي متعدد الحدود(الأنموذج المقترح):

لتكن المتسلسلة الزمنية $\{X_t\}$ حيث $t=\pm1,\pm2,\pm3,\dots$ يعرف أنموذج الانحدار الذاتي متعدد الحدود من المرتبة الاولى بالشكل الأتي:

$$X_t = (a X_{t-1})^{k-1} X_{t-1} + z_t \qquad , k = 2,3,\dots \qquad \dots (5)$$

حيث$\{Z_t\}$ الضوضاء الأبيض (الضجيج الأبيض), وان a كمية ثابتة .

5-2 أنموذج الأنحدار الذاتي الأسي : [8]

عرف Oda and Ozaki عام 1977 أنموذج الانحدار الذاتي الاسي من المرتبة p بالشكل الأتي

$$X_t = \sum_{i=1}^{p} (\alpha_i + \pi_i e^{-x_{t-1}^2}) x_{t-i} + Z_t \;, \; i=1,2,3,\dots,p \qquad \dots \quad (6)$$

حيث $\{Z_t\}$ الضوضاء الابيض (الضجيج الأبيض) , α_i , π_i كميات ثابتة (معلمات الأنموذج).

وقد اثبت العالمان (Oda and Ozaki) إستقرارية دورة النهاية للأنموذج (5) يمكن ايجادها من خلال المبرهنة الآتية :

2−6 مبرهنة :

لتكن المتسلسلة الزمنية $\{X_t\}$ متمثلة بأنموذج الأنحدار الذاتي الاسي من المرتبة الأولى :

$$X_t=(\alpha_1+\pi_1 e^{-x_{t-1}^2})\, x_{t-1} + Z_t \qquad \ldots \quad (7)$$

دورة النهاية بدورة X_{t+1}, X_{t+2}, ..., X_{t+q}, q للأنموذج تكون مستقرة مداريا(orbitally stable) إذا تحقق الشرط:

$$\left|\prod_{j=1}^{q}\left[\alpha_j+\pi_j(1-2x_{t+q-j}^2)e^{-x_{t+q-j}^2}\right]\right|<1$$

البرهان :− لاحظ [9] .

3− الإستقرارية (stability) [7]

تصادفنا في العديد من المسائل الفيزيائية والهندسية عمليات عشوائية يمكن وصفها على نحو غير ثابت وغالبا ما تكون هذه العمليات في حالة توازن إحصائي(Statistical equilibrium)

بمعنى أنه عند اخذ مشاهدات مثل هذه العمليات وتقسيمها الى عدد من الفترات الزمنية فأن المقاطع الناتجة تمتلك خصائص احتمالية وإحصائية متشابهة.

تكون المتسلسلة الزمنية بأنها مراوحة من المرتبة m (m-Orderstationary) إذا كأن لأي $t_1, t_2, ..., t_n$ ولأي ثابت k فأن جميع العزوم من الدرجة m لـ $(X_{t_{1+k}}, X_{t_{2+k}}, ..., X_{t_{n+k}})$ تكون $E[\{X_{t_1}\}^{m_1}, \{X_{t_2}\}^{m_2}, ..., \{X_{t_n}\}^{m_n}] = E[\{X_{t_{1+k}}\}^{m_1}, \{X_{t_{2+k}}\}^{m_2}, ..., \{X_{t_{n+k}}\}^{m_n}]$ لجميع النقاط الزمنية المختارة $t_1, t_2, ..., t_n$ ولأي ثابت k ولأي ثوابت صحيحة موجبة $m_1, m_2, ..., m_n$ تحقق القيد $m_1+m_2+...+m_n \le m$. لأحظ [3] وكحالة خاصة يقال أن السلسلة الزمنية $\{X_t\}$ أنها مراوحة من المرتبة الأولى (First Order Stationary) إذا كأنت:

كما يقال للسلسلة الزمنية $\{X_t\}$ أنها مراوحة من المرتبة الثانية (Second Order Stationary) إذا حققت الشروط الآتية:

1) $E(X_t) = \mu$ μ كمية ثابتة لاتعتمد على t

2) $Var(X_t) = \sigma_X^2$ σ_X^2 كمية ثابتة لاتعتمد على t

3) $Cov[X_{t1}, X_{t2}] = \gamma_{(t1,t2)}$ دالة بدلالة $|t_2 - t_1|$ فقط

1−3 النقطة المنفردة (singular point): [12]

النقطة المنفردة تعرف بأنها تلك النقطة التي تحقق الشرط الآتي: إن أي مسار للنموذج يبدأ من نقطة قريبة بشكل كاف من ζ يقترب منها إما عندما $t\to\infty$ أو عندما $t\to-\infty$.

إذا اقترب المسار من ζ عندما $t\to\infty$ فأن النقطة المنفردة تكون مراوحة وبالعكس إذا اقترب المسار من ζ عندما $t\to-\infty$ فأن النقطة المنفردة ζ تكون غير مراوحة.

2-3 دورة النهاية (limit cycle):- [12]

دورة النهاية للنموذج تعرف بأنها المسار المغلق والمعزول $x_t = (x_t, x_{t+1}, x_{t+2}, ..., x_{t+q})$ حيث q عدد صحيح موجب. المقصود بأنَّ المسار مغلق هو أنه إذا كأنت القيم الابتدائية $(x_t, x_{t+1}, x_{t+2}, ..., x_{t+q})$ تنتمي إلى دورة النهاية فأن $(x_1, x_2, x_3, ..., x_p) = (x_{1+kq}, x_{2+kq}, x_{3+kq}, ..., x_{p+kq})$ لأي عدد صحيح k.

والمقصود بالمعزول (Isolated) أن أي مسار يبدأ قريباً من دورة النهاية بشكل كاف يتقارب نحو دورة النهاية أما عندما $t\to\infty$ أو $t\to-\infty$ ، فـإذا كأن المسار يقترب من دورة النهاية عندما $t\to\infty$ فأن دورة النهاية تكون مراوحة وبالعكس إذا كأن المسار يقترب من دورة النهاية عندما $t\to-\infty$ فأن دورة النهاية تكون غير مراوحة.

سنحاول في الفقرة التالية دراسة إستقرارية أنموذج الأنحدار الذاتي غير الخطي (متعدد الحدود من الدرجة p والمرتبة الأولى)

3-3 الصفات الأحصائية للأنموذج المقترح :

ليكن لدينا أنموذج أنحدار ذاتي غير خطي (متعدد الحدود) من الدرجة k و المرتبة الاولى:

$$X_t=(a X_{t-1})^{k-1} X_{t-1}+Z_t \qquad k=2,3,4, \ldots . \qquad \ldots (8)$$

حيث $\{Z_t\}$ الضوضاء الابيض (التشوش الابيض).

سنحاول إيجاد الصفات الإحصائية للأنموذج (8)بتحويله الى انموذج اوساط متحركة باستخدام طريقة التقريب المتعاقب وبفرض أن k=2,3 ثم نعمم النتائج .

بما أن $\{Z_t\}$ الضوضاء الابيض (الضجيج الأبيض) وبفرض أنها تتبع التوزيع الطبيعي ونفرض أن $0<a$ فأن جميع العزوم تكون موجودة لأنموذج الأوساط المتحركة غير الخطية .

أولا: نضع k=2 في الأنموذج (8) نحصل على أنموذج متعدد حدود من الدرجة الثانية والمرتبة الاولى:

$$X_t=(a X_{t-1})^2 +Z_t$$

وبفرض أن $X_0=0$ نحصل على

$$X_1=Z_1$$

$$X_2=a Z_1^2 + Z_2$$

$$\vdots$$

$$X_t = Z_t + \sum_{j=0}^{t-2} a^{2^j-1} \; Z_{t-j-1}^{2^j} + \sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty} g_{uv} \; Z_{t-u} \; Z_{t-v} + \sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty}\sum_{w=0}^{\infty} g_{uvw} \; Z_{t-u} \; Z_{t-v} \; Z_{t-w} + \cdots \qquad \ldots (9)$$

حيث g(.) تمثل الثابت a بصيغ معينة كناتج تبسيط مفكوك المعادلة أعلاه .المعادلة (9) تمثل أنموذج التمثيل غير الخطي العام(General non-linear representation)

سنحاول في هذه الفقرة التالية إيجاد الصفات الإحصائية للأنموذج (9):

أولا: القيمة المتوقعة: بأخذ القيمة المتوقعة للمعادلة (9) نحصل على

$$E(X_t) = E(Z_t) + E\left(\sum_{j=0}^{t-2} a^{2^j-1} \; Z_{t-j-1}^{2^j}\right) + E(\sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty} g_{uv} \; Z_{t-u} \; Z_{t-v} + \sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty}\sum_{w=0}^{\infty} g_{uvw} \; Z_{t-u} \; Z_{t-v} \; Z_{t-w} + \cdots) \quad \ldots (10)$$

$\because$ $\{Z_t\}$ ضجيج ابيض

$$\therefore E(X_t) = 0 + E\left(\sum_{j=0}^{t-2} a^{2^j-1} \; Z_{t-j-1}^{2^j}\right) + 0$$

$$)= \sum_{j=0}^{t-2} a^{2^j-1} \; E(Z_{t-j-1}^{2^j})E(\sum_{j=0}^{t-2} a^{2^j-1} \; Z_{t-j-1}^{2^j}$$

$$E(Z^{2^j})=\int_{-\infty}^{\infty} Z^{2^j} \; f(z)dz = 2\int_0^{\infty} Z^{2^j} \; f(z)dz \because$$

لان $\{Z_t\}$ متغير عشوائي $f(z)$ دالة كثافة احتمال.لاحظ [11]

$$)= 2\int_0^{\infty} Z^{2^j} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \; dz \qquad (Z\sim N(0,\sigma_z^2)) \Longrightarrow E(Z^{2^j}$$

لتكن j=1 وبفرض أن

$$\Longrightarrow z = \sqrt{2u} \; \Longrightarrow dz = \frac{du \; 1}{\sqrt{2u}2} z^2 = u$$

$$)= 2\int_0^{\infty} 2u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u} \; \frac{du}{\sqrt{2u}} \therefore \; E(Z^2$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} u^{\frac{1}{2}} \; e^{-u} \, du$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}} \; \frac{1}{2} \; \Gamma\tfrac{1}{2} = 1$$

بصورة عامة عندما j=t-2

$$)= 2\int_0^{\infty} Z^{2^{t-2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \; dzE(Z^{2^{t-2}}$$

وباستخدام نفس الفرضية نحصل على

$$)=\left(\frac{2^{t-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\right) \Gamma(t-\tfrac{5}{2})E(Z^{2^{t-2}}$$

لتكن $t=3 \Longrightarrow E(Z^{2^{3-2}})=\left(\frac{2^{3-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\right) \Gamma\left(3-\tfrac{5}{2}\right) = \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}\right) \Gamma\frac{1}{2} = 2$

$$)= g(t) \Longrightarrow \sum_{j=0}^{t-2} a^{2^j-1} \; E(Z_{t-j-1}^{2^j}$$

$$g(t) \qquad \Longrightarrow E(X_t) =$$

حيث g(t) دالة تعتمد على t .

<u>ثانيا: التباين:</u>

$$Var(X_t) = E(X_t^2) - E(X_t)^2 \because$$

وبالرجوع إلى المعادلة (9) وبعد إيجاد X_t^2 نحصل على

$$X_t^2 = Z_t^2 + \sum_{j=0}^{t-2} a^{4^{j+1}-2} \; Z_{t-j-1}^{4^j} + \sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty} g_{uv} \; Z_{t-u} \; Z_{t-v} + \sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty}\sum_{w=0}^{\infty} g_{uvw} \; Z_{t-u} \; Z_{t-v} \; Z_{t-w} + \cdots \quad \ldots (11)$$

وبأخذ القيمة المتوقعة للمعادلة (11) نحصل على

$$E(X_t^2) = E(Z_t^2) + E(\sum_{j=0}^{t-2} a^{4^{j+1}-2} \; Z_{t-j-1}^{4^j}) + E(\sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty} g_{uv} \; Z_{t-u} \; Z_{t-v})$$
$$+ E(\sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty}\sum_{w=0}^{\infty} g_{uvw} \quad Z_{t-u} \; Z_{t-v} \; Z_{t-w}) + \cdots \qquad \dots \; (12)$$

$$\because \; E\left(\sum_{j=0}^{t-2} a^{4^{j+1}-2} \; Z_{t-j-1}^{4^j}\right) = \sum_{j=0}^{t-2} a^{4^{j+1}-2} \; E\left(Z_{t-j-1}^{4^j}\right)$$

وباستخدام نفس العلاقات والفرضيات السابقة نجد أن

$$E(X_t^2) = h(t)$$

حيث h(t) دالة تعتمد على t .وهذا يعني ان العملية غير مراوحة.

ثالثا : التغاير:

$$\because Cov(X_t, X_{t\pm k}) = E(X_t . X_{t\pm k}) - E(X_t). E(X_{t\pm k})$$

$$X_{t\pm k} = \sum_{j=0}^{t-2} a^{p^j - r} \; Z_{t\pm K-j-1}^{p^j} + \sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty} g_{uv} \; Z_{t\pm K-u} \; Z_{t\pm K-v}$$
$$+ \sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty}\sum_{w=0}^{\infty} g_{uvw} \quad Z_{t\pm K-u} \; Z_{t\pm K-v} \; Z_{t\pm K-w} \qquad \dots \; (13)$$

حيث p,r كميات ثابتة.

$$X_t . X_{t\pm k} = \sum_{j=0}^{t-2} a^{q^j - b} \; Z_{t\pm K-j-1}^{q^j} + \sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty} g_{uv} \; Z_{t\pm K-u} \; Z_{t\pm K-v}$$
$$+ \sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty}\sum_{w=0}^{\infty} g_{uvw} \quad Z_{t\pm K-u} \; Z_{t\pm K-v} \; Z_{t\pm K-w} \qquad \dots \; (14)$$

حيث q,b كميات ثابتة.

وبأخذ القيمة المتوقعة للمعادلة الأخيرة نحصل على

$$\mathrm{E}(X_t . X_{t\pm k}) = l(t)$$

أي أن التغاير يعتمد على t وأن t تمثل الزمن .

نستنتج من الفقرة السابقة أن عزوم الأنموذج الذاتي غير الخطي المتعدد الحدود من المرتبة الاولى جميعها تعتمد على الزمن أي أن الأنموذج غير مراوح.

ثانيا: سوف نحاول إيجاد العزوم للأنموذج (8) عندما k=3 (انموذج متعدد الحدود من الدرجة الثالثة والمرتبة الاولى)

$X_t=(a \; X_{t-1})^3 + Z_t$

وباستخدام نفس الفرضية السابقة نحصل على

$$X_t = Z_t + \sum_{j=0}^{t-2} a^{3^j-1} \ Z_{t-j-1}^{3^j} + \sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty} g_{uv} \ Z_{t-u} \ Z_{t-v} + \sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty}\sum_{w=0}^{\infty} g_{uvw} \ Z_{t-u} \ Z_{t-v} \ Z_{t-w} + \cdots \qquad \ldots (15)$$

القيمة المتوقعة:

$$E(X_t) = E\left(Z_t + \sum_{j=0}^{t-2} a^{3^j-1} \ Z_{t-j-1}^{3^j} + \sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty} g_{uv} \ Z_{t-u} \ Z_{t-v} + \sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty}\sum_{w=0}^{\infty} g_{uvw} \ Z_{t-u} \ Z_{t-v} \ Z_{t-w} + \cdots \right) \qquad \ldots (16)$$

$$E(X_t) = E(Z_t) + E(\sum_{j=0}^{t-2} a^{3^j-1} \ Z_{t-j-1}^{3^j}) + E(\sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty} g_{uv} \ Z_{t-u} \ Z_{t-v}) + E(\sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty}\sum_{w=0}^{\infty} g_{uvw} \ Z_{t-u} \ Z_{t-v} \ Z_{t-w}) + \cdots \qquad \ldots (17)$$

$$E(Z_t) = 0$$

$$E\left(Z^{3^j}\right) = 2\int_0^{\infty} Z^{3^j} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \ dz$$

$$\therefore E(X_t) = k(t)$$

حيث $k(t)$ دالة تعتمد على t .

وبإيجاد بقية العزوم نجد أن جميع العزوم لهذا الأنموذج تعتمد على t .

أي أن الأنموذج من الدرجة الثالثة والمرتبة الأولى أيضا يعتمد على الزمن (غير مراوح) .

ثالثا: بصورة عامة عندما نأخذ الأنموذج المقترح من الدرجة k والمرتبة الأولى

$X_t=(a\ X_{t-1})^{k}{}_1+Z_t$

وباستخدام نفس الفرضيات السابقة للنماذج بدرجات دنيا عندما(k=2,3) نحصل على

$$X_t = Z_t + \sum_{j=0}^{t-2} a^{(k+1)^j-1} \ Z_{t-j-1}^{(k+1)^j} + \sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty} g_{uv} \ Z_{t-u} \ Z_{t-v} + \sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty}\sum_{w=0}^{\infty} g_{uvw} \ Z_{t-u} \ Z_{t-v} \ Z_{t-w} + \cdots \qquad \ldots (18)$$

المعادلة (18) تمثل أنموذج أوساط متحركة غير منتهي وغير خطي, وعند إيجاد العزوم للأنموذج السابق نحصل على نفس النتيجة.

نستنتج من ذلك أن الصفات الإحصائية لأنموذج الانحدار الذاتي غير الخطي(متعدد الحدود من الدرجة k والمرتبة الأولى) يعتمد على الزمن,أي أن الأنموذج غير مراوح.

3-4 طريقة التقريب: [10]

سنحاول في هذه الفقرة دراسة إستقرارية الأنموذج المقترح باستخدام التقريب بالمحلية غير الخطية:

تتلخص الطريقة بالمراحل الآتية:

1- المرحلة الأولى: إيجاد النقاط المنفردة غير الصفرية للأنموذج غير الخطي.

2- المرحلة الثانية: اختبار إستقرارية تلك النقطة باستخدام تقنية التقريب الخطية.

3- المرحلة الثالثة:– اختبار إستقرارية دورة النهاية ان وجدت.

ليكن لدينا الأنموذج المعرف بالمعادلة (7)

$$X_t=(a\,X_{t-1})^k+Z_t$$

سنحاول دراسة إستقرارية الأنموذج عندما $k=2,3$ ثم نعمم النتائج:

3-4-1 إيجاد النقطة المنفردة:

عندما $k=2$

أي أن

$$X_t=(a\,X_{t-1})^2+Z_t \quad \ldots(19)$$

باستخدام تعريف النقطة المنفردة وإهمال تأثير { Z_t } نحصل على

$$\Rightarrow \xi - a\,\xi^2 = 0 \;\Rightarrow\; \xi(1-a\,\xi)=0 \xi = a\,\xi^2$$

$$\xi=\frac{1}{a}\;;\quad \xi=0$$

أي أن هنالك نقطتان هما النقطة الثابتة الصفرية والنقطة الثابتة $\xi=\frac{1}{a}$

3-4-2 إستقرارية النقطة المنفردة:

لأختبار استقرارية النقطة المنفردة , ليكن X_t تقترب من النقطة المنفردة ويمكن تمثيلها بالعلاقة

$X_t=\xi+\xi_t$ وعليه يكون $X_{t-1}=\xi+\xi_{t-1}$ حيث ξ_t مقدار صغير جدا

وبالتعويض بالأنموذج (19) نحصل على

$$\xi+\xi_t=a\,(\xi+\xi_{t-1})^2$$
$$\xi+\xi_t=a\,(\xi^2+2\xi\xi_{t-1}+\xi_{t-1}^2)$$

بما أن ξ_t صغيرة جدا نفرض أن $\xi_t^n \to 0$ لكل $n\geq 2$

وبذلك نحصل على

$$\xi_t=2a\xi\xi_{t-1}$$
$$\because\; \xi=\frac{1}{a}$$

$$\xi_t=2\xi_{t-1} \quad \ldots(20)$$

المعادلة (20) تمثل أنموذج انحدار ذاتي خطي من المرتبة الأولى وأن(جذر المعادلة يساوي 2) أي أنه يقع خارج نطاق دائرة الوحدة, وبذلك فأن الأنموذج يمتلك نقطة منفردة غير مراوحة.

3-4-3 شرط إستقرارية دورة النهاية :

سنحاول في هذه الفقرة إيجاد شروط إستقرارية دورة النهاية (أن وجدت) للأنموذج المقترح والذي صيغته :

$$X_t=(a\,X_{t-1})^{k-1}\,X_{t-1}+Z_t$$

وبالاعتماد على المبرهنة (3-4) من خلال القضية الآتية:

3-4-3-1 قضية:

ليكن لدينا الأنموذج

$X_t=(a\, X_{t-1})\, X_{t-1}+Z_t$

دورة النهاية بالدورة q (أن وجدت) للأنموذج أعلاه تكون مستقرة مداريا(orbitally stable) اذا تحقق الشرط:

$\left|\frac{\xi_{t+q}}{\xi_t}\right|<1$

البرهان :

نفرض أن الأنموذج $X_t=(a\, X_{t-1})\, X_{t-1}+Z_t$ يمتلك دورة نهاية بالدورة q , q>1 بالشكل :

$X_t, X_{t+1}, X_{t+2}, \ldots, X_{t+q}=X_t$

وهو مسار مغلق ومعزول .

كل نقطة X_s على مسار قريب من دورة النهاية يمكن التعبير عنها بـــ $X_s+\xi_s$; s=t ,t-1,

وبإلغاء تأثير { Z_t } وبفرض $\xi_t^n \longrightarrow 0, \forall n \geq 2$

نحصل على

$$X_t+\xi_t=a(X_{t-1}^2+2X_{t-1}\,\xi_{t-1}+\xi_{t-1}^2)$$

أي أن

$$\xi_t=(2\,a\,X_{t-1})\,\xi_{t-1}$$

لتكن t=t+q

$$\xi_{t+q}=\left(2\,a\,X_{t+q-1}\right)\xi_{t+q-1}$$

ومنها نحصل على

$$\xi_{t+q}=\left(2\,a\,X_{t+q-1}\right)\left(2\,a\,X_{t+q-2}\right)\left(2\,a\,X_{t+q-3}\right)\cdots(2\,a\,X_t)\xi_t$$

$$\xi_{t+q}=\prod_{i=1}^{q}\left(2\,a\,X_{t+q-i}\right)\xi_t$$

أي أن دورة النهاية لأنموذج الانحدار الذاتي المتعدد الحدود (من الدرجة الثانية والمرتبة الاولى) يكون غير مراوح اذا تحقق الشرط الأتي:

$$\left|\prod_{i=1}^{q}\left(2\,a\,X_{t+q-i}\right)\right|<1$$

عندما k=3 نحصل على $X_t=(a\,X_{t-1})^2\,X_{t-1}+Z_t$

1- النقطة المنفردة :-

تكون النقاط المنفردة للأنموذج أعلاه هي النقطة الصفرية و $\xi=\frac{1}{a}, \xi=-\frac{1}{a}$, حيث $a\neq 0$.

2- *إستقرارية* النقطة المنفردة :-

باستخدام نفس الفرضيات السابقة وبتعويض هذه الفرضيات بالأنموذج أعلاه نحصل على

$\ldots\ (21)\xi_t=3\xi_{t-1}$

المعادلة (21) تمثل أنموذج أنحدار ذاتي خطي من المرتبة الأولى وأن جذر المعادلة =3 أي أنه يقع خارج نطاق دائرة الوحدة وبذلك فأن الأنموذج يمتلك نقطة منفردة غير مراوحة .

3- إستقرارية دورة النهاية :-

باستخدام نفس الفرضيات السابقة نحصل على

$$X_t+\xi_t=a^2(X_{t-1}^2+2X_{t-1}\,\xi_{t-1}+\xi_{t-1}^2)(X_{t-1}+\xi_{t-1})$$

أي أن

$$\xi_{t-1}\xi_t = (3\,a^2\,X_{t-1}^2)$$

لتكن t=t+q

$$\xi_{t+q} = \prod_{i=1}^{q}(3\,a^2\,X_{t+q-i}^2)\xi_t$$

وبذلك فأن شرط إستقرارية دورة النهاية لأنموذج الانحدار الذاتي المتعدد الحدود (من الدرجة الثالثة والمرتبة الاولى) هو $\left|\prod_{i=1}^{q}(3\,a^2\,X_{t+q-i}^2)\right|<1$ وبصورة عامة عند اخذ أنموذج الأنحدار الذاتي غير الخطي متعدد الحدود (من المرتبة الاولى والدرجة k) والذي صيغته:

$X_t=(a\,X_{t-1})^k+Z_t$ $\quad k=1,2,3,\ldots$

1- النقاط المنفردة لهذا الأنموذج هي النقطة الصفرية و النقاط $\xi = \left(\frac{1}{a}\right)^k$, $k=1,2,\ldots$

2- إستقرارية النقاط المنفردة:

باستخدام الفرضيات التي تم تطبيقها على الانموذج عندما k=1,2 نحصل على

$\xi_t = (k)\xi_{t-1}$ (22) … ,k=2,3,4,…

والذي تمثل أنموذج انحدار ذاتي خطي من المرتبة الأولى (وأن جذر المعادلة هو (k)) وبهذا فأن أنموذج الأنحدار الذاتي غير الخطي (متعدد الحدود من المرتبة الأولى والدرجة k) يمتلك نقاط منفردة غير صفرية وغير مراوحة

3- شرط إستقرارية دورة النهاية :

بالاعتماد على المبرهنة التي تم استخدامها في الحالات k=2,3 على الانموذج المعرف بالمعادلة (8) نحصل على شرط استقرارية دورة النهاية(ان وجدت) للانموذج(8) وهو

$\left|\prod_{i=1}^{q}((k)\,a^{k-1}\,X_{t+q-i}^{k-1})\right|<1$ (23) …

وبهذا يتم البرهان.

الاستنتاجات :

تم في هذا البحث دراسة الصفات الرياضية والإحصائية لأحد نماذج الانحدار الذاتي غير الخطي (انموذج متعدد الحدود من المرتبة الاولى والدرجة **k**) ومن خلال الدراسة تبين ما يلي :

1- بعد إيجاد العزوم بطريقة (التعويض المتعاقب) تبين ان جميع العزوم المتمثلة (المعدل والتباين والتغاير) تعتمد على الزمن أي أن الأنموذج غير مراوح (من تعريف الاستمرارية).

2- إن الأنموذج يمتلك نقاط منفردة صفرية ونقاط غير صفرية بصيغة $\left(\frac{1}{a}\right)^k$.

3- جميع النقاط المنفردة للأنموذج بدرجات مختلفة تكون غير مراوحة .

4- شرط استقرارية دورة النهاية (إن وجدت) للأنموذج المقترح هو

$\left|\prod_{i=1}^{q}((k)\,a^{k-1}\,X_{t+q-i}^{k-1})\right|<1$

حيث $q > 1$.

المصادر

[1] البدراني , ظافر رمضان (2002) "دراسة في تشخيص نظم السيطرة التصادفية مع إشارة خاصة الى اسلوب فضاء الحالة والاستقرارية" ,اطروحة دكتوراه غير منشورة , , كلية علوم الحاسوب والرياضيات , جامعة الموصل.

[2] السليم , إسراء سالم محمود السليم (2012) "دراسة استقرارية نماذج الانحدار الذاتي غير الخطية وبحدود دوال مثلثية مع تطبيق " . .رسالة ماجستير , كلية علوم الحاسوب والرياضيات ,جامعة الموصل .

[3] خلف , حامد محمد خلف (2011) ,"دراسة استقرارية احد نماذج الانحدار الذاتي النسبي غير الخطي",بحث منشور, كلية علوم الحاسوب والرياضيات , جامعة الموصل.

[4] فاندل, واللتر فاندل (1992) "السلاسل الزمنية من الوجهة التطبيقية ونماذج بوكس-كوكس" .

[5] نهال , نهال هاشم حميد (2009) "عكس نماذج الانحدار الذاتي المتقعطة الى مستمرة" .رسالة ماجستير , كلية علوم الحاسوب والرياضيات ,جامعة الموصل

[6] Al-jalawy,Amed S.A., (2003), "Solution of difference equation using Z-transform technique" Msc. In applied mathematics unpuplished ,Al-Nahrain university,Iraq.

[7] Chatifield , C. , (1978) , "The Analysis of time series ",4th edition Chapman and Hall , London .

[8] Chen , S. ; S.A. Billings , (1989) , "Modlling and analysis of non-linear time series" , University of Southampton .

[9] Ozaki , T. , (1982) , " Nonlinear Time series stochastic Processes and Dynamical system " Handbook of statistics , Vo1.5 , Itd .

[10] Ozaki , T. ,(1985), " Nonlinear Time series Models and Dynamical system " E.J. Hannan , P.R. Krishnaiah , M , M.Rao , eds. , Handbook of statistics , Vo1.5 , PP.25-83 .

[11] Priestley ,M.B. , (1988) , "Nonlinear And Nonstationary Time Series Analysis " London: ACADEMIC. Press .

[12] Witt , A. & Kurths , J. & Pikosvky , A. , (1998) , " Testing statinoarity in time series " , Physical Review E 58:1800-1810 .