On Generalized m-flat Modules

Zubayda M. Ibraheem — *zubaida_almulla@yahoo.com*
Maha F. Khalaf — *maha.farman@yahoo.com*
College of Computer Sciences and Mathematics
University of Mosul, Mosul, Iraq

Received on: 22/12/2011 **Accepted on: 15/02/2012**

ABSTRACT

Let I be a right (left) ideal of a ring R. Then R/I is a right (left) generalized m – flat modules (GmF – module) if and only if for each $a \in I$, there exist $b \in I$ and a fixed positive integer m such that $a^m = ba^m \left(a^m = a^m b\right)$. We study characterization and properties this class of flat modules, and we give the relation between this class and generalized m- flat modules and m – regular rings, reduced rings, reversible rings and uniform rings.

Keywords: Moduls, flat, regular, reduced, reversible, uniform.

حول المقاسات المسطحة المعممة من النمط – m

زبيدة محمد إبراهيم **مها فرمان خلف**
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
جامعة الموصل، الموصل، العراق

تاريخ استلام البحث: 2011/12/22 **تاريخ قبول البحث: 2012/02/15**

الملخص

ليكن I مثالياً أيمن (أيسر) في الحلقة R . فإن R/I مقاس مسطح معمم أيمن (أيسر) من النمط – m (مقاس من النمط –GmF) إذا وفقط إذا كان لكل $a \in I$, يوجد $b \in I$ وعدد صحيح موجب ثابت m بحيث إن $a^m = ba^m$ $\left(a^m = a^m b\right)$.نحن درسنا مميزات وخواص هذا الصنف من المقاسات المسطحة وكذلك العلاقة بين هذا الصنف من المقاسات المسطحة المعممة من النمط – m والحلقات المنتظمة من النمط – m , والحلقات المختزلة والحلقات العكوسة والحلقات الموحدة.

كلمات مفتاحية: مقاسات، مسطحة، منتظمة، مختزلة، عكوسة، موحدة.

1. المقدمة :

في هذا البحث R حلقة تجميعية متحايدة والمقاسات أحادية.لكل $a \in R$, $r\left(a\right)$ و$l\left(a\right)$ يشير إلى التالف الأيمن والتالف الأيسر لـ a على التوالي , كما أشرنا بـ $J\left(R\right)$ و $N\left(R\right)$ إلى جذر جاكوبسون ومجموعة كل العناصر المعدومة القوى على التوالي.

يقال للحلقة R بأنها حلقة موحدة (Uniform) يمنى (يسرى) إذا كان كل مثالي غير صفري أيمن (أيسر) في R أساسيا[6]. يقال للحلقة R بأنها مختزلة (Reduced) إذا كانت R لا تحتوي على عناصر غير صفرية معدومة القوى , أو بعبارة أخرى لكل عنصر $a \in R$ إذا كان $a^2 = 0$ فإنَّ $a = 0$. يقال للحلقة R بأنها عكوسة (Reversible) إذا كان $ab = 0$ يؤدي $ba = 0$ لكل $a,b \in R$[2] .. يقال للحلقة R بأنها

حـــلقة ديـــــو بضعف اليمنى (Weakly -duo) , إذا كان لكل $a \in R$ يوجد عدد صحيح موجب n بحيث يكون $a^n R$ مثالياً أيمن وأيسر في R [1]. يقال للحلقة R بأنها حلقة كوازي ديو (Quasi duo) اليمنى (اليسرى), إذا كان كل مثالي أيمن (أيسر) أعظم هو مثالي [7] .ليكن I مثالياً أيمن (أيسر) في الحلقة R , فإن R/I مقاس مسطح أيمن (أيسر) إذا وفقط إذا لكل $a \in I$, يوجد $b \in I$ بحيث إن $a = ba$ $\left(a = ab\right)$ [5].يقال للحلقة R بأنها حلقة فون نتومان المنتظمة إذا كان لكل $a \in R$ يوجد $b \in R$ بحيث أن $a = aba$. في المصدر [4] أعطى McCoy تعريفاً للحلقة المنتظمة من النمط – m والمنتظمة من النمط – π . يقال للحلقة R بأنها حلقة منتظمة من النمط – m (m-regular) إذا كان لكل $a \in R$ يوجد عدد صحيح موجب ثابت m بحيث إن a^m يكون منتظماً $\left(a^m = a^m b a^m\right)$ لبعض $b \in R$. وإذا كانت m غير ثابتة عندئذ تسمى R حلقة منتظمة من النمط – π.

2. المقاسات المسطحة المعممة من النمط – m

في هذا البند تم دراسة نوع من المقاسات المسطحة المعممة من النمط – m عندما تكون m عدد ثابت مع بعضاً من خواصها الأساسية.

تعريف 2.1 :

ليكن I مثالياً أيمن (أيسر) في الحلقة R . فإن R/I مقاس مسطح معمم أيمن (أيسر) من النمط – m (مقاس من النمط – GmF) إذا وفقط إذا كان لكل $a \in I$, يوجد $b \in I$ عدد صحيح موجب ثابت m بحيث إن $a^m = ba^m$ $\left(a^m = a^m b\right)$.

مثال:

في حلقة الأعداد الصحيحة معيار 12 , $I = \{0, 4, 8\}$. فإن Z_{12}/I مقاس مسطح لذلك هو مقاس من النمط – G2F.

قضية 2.2: [3]

لتكن R حلقة عكوسة , إذا كان لكل $0 \neq a \in R$ ولعدد صحيح موجب n , فإن $r\left(a^n\right) = l\left(a^n\right)$.

القضية الآتية تعطي العلاقة بين المقاسات اليمنى واليسرى من النمط – GmF.

قضية 2.3:

لتكن R حلقة عكوسة , وليكن I مثالياً في R . فإن R/I مقاس أيسر من النمط – GmF إذا وفقط إذا كان R/I مقاس أيمن من النمط – GmF.

البرهان: واضح.

قضية 2.4:

لتكن R حلقة و M مثالياً أيمن أعظم في R , وليكن R/M مقاس أيمن من النمط – GmF. فإن كل عنصر ليس قاسماً صفرياً أيسر له معكوس أيمن.

البرهان:

نفترض أن $a \neq 0$ هو عنصر ليس قاسماً صفرياً أيسر, و نفترض أن $aR \neq R$, لذلك يوجد مثالياً أيمن أعظم M في R يحتوي aR , وبما أن R/M مقاس أيمن من النمط – GmF , فإنه يوجد $b \in M$ وعدد صحيح موجب ثابت m , بحيث إن $a^m = ba^m$ والذي يؤدي إلى $(1-b)a^m = 0$, بما أن a عنصر ليس قاسماً صفرياً أيسر, فإن $(1-b) = 0$, وعليه نحصل على $b = 1 \in M$ وهذا يناقض الفرض, إذاً $aR = R$ وعليه a له معكوس أيمن.■

قضية مساعدة 2.5:[7]

إذا كانت R حلقة كوازي ديو اليمنى , فإن $N(R) \subseteq J(R)$.

القضية الآتية تبين العلاقة بين جذر جاكوبسون $J(R)$ ومجموعة كل العناصر معدومة القوى $N(R)$ في المقاسات اليمنى من النمط – GmF .

قضية 2.6:

لتكن R حلقة كوازي ديو اليمنى, ولتكن $a \in R$, وان R/aR مقاس أيمن من النمط –GmF , فإن $J(R) = N(R)$.

البرهان:

نفترض أن $0 \neq a \in J(R)$, بما أن R/aR مقاس أيمن من النمط – GmF , يوجد $b \in aR$ وعدد صحيح موجب ثابت m , بحيث إن $a^m = ba^m$, وهذا يؤدي $a^m = ara^m$ لبعض $r \in R$, وعليه $(1-ar)a^m = 0$, لذلك فإن $(1-ar)$ له معكوس , وبالتالي فإنه يوجد عنصر $u \in R$ بحيث إن $u(1-ar) = 1$ وبضربها في a^m من جهة اليمين نحصل على $u(a^m - ara^m) = a^m$ أي أن $a^m = 0$ إذاً $a \in N(R)$, لذلك فإن $J(R) \subseteq N(R)$, وبما أن $N(R) \subseteq J(R)$ (حسب القضية المساعدة 2.6) , نحصل على $J(R) = N(R)$.■

مبرهنة 2.7:

لتكن R حلقة ديو بضعف , فإن R/a^mR مقاس أيمن من النمط – GmF , لبعض $a \in R$ ولعدد صحيح موجب ثابت m إذا وفقط إذا a^mR مثالي متحايد.

البرهان:

نفترض أن I مثالي في الحلقة R , بحيث إن $I = a^mR$, حيث $a \in R$ وعدد صحيح موجب ثابت m , واضح أن $I^2 \subseteq I$. من ناحية أخرى بما أن R/I مقاس أيمن من النمط – GmF , فإنه يوجد $b \in a^mR$ بحيث إن $a^m = ba^m = a^mra^m$, لبعض $r \in R$. الآن , $a^m \in I$ و $a^m = a^mra^m \in I^2$, لذلك $I \subseteq I^2$. وعليه $I^2 = I$.

لإثبـــــات العكــــــس , نفتـــرض أن $I^2 = I$ و لـــيكن $a^m \in a^m R = \left(a^m R\right)^2$. الآن , $\left(a^m R\right)^2 = a^m R a^m R$ والذي يؤدي إلى أن $a^m = a^m c a^m$, لبعض $c \in R$. لذلك فإن $R / a^m R$ مقاس أيمن من النمط – GmF.■

3. العلاقة بين المقاسات المسطحة من النمط – GmF والحلقات الأخرى

في هذا البند تم إعطاء العلاقة ما بين المقاسات من النمط – GmF والحلقات المنتظمة من النمط – m والحلقة المقسومة والحلقة الموحدة والحلقة المختزلة.

القضية الآتية تعطي العلاقة بين الحلقة الموحدة والحلقة المقسومة والمقاسات من النمط – GmF.

قضية مساعدة 3.1:[3]

لتكن R حلقة مختزلة , فإن لكل $a \in R$ ولأي عدد صحيح موجب n, فإن :

1) $r\left(a^n\right) = l\left(a^n\right)$.

2) $r\left(a\right) = r\left(a^n\right)$.

3) $a^n R \cap r\left(a^n\right) = 0$.

مبرهنة 3.2:

لتكن R حلقة عكوسة وموحدة يمنى وM مثالياً أيمن أعظم في R , حيث R/M مقاس أيمن من النمط – GmF, فإن R حلقة مقسومة.

البرهان:

نفترض أن $0 \neq a \in R$ و $aR \neq R$, لذلك يوجد مثالياً أيمن أعظم M يحتوي aR. بما أن R/M مقاس أيمن من النمط – GmF , يوجد $b \in aR \subseteq M$ وعدد صحيح موجب ثابت m , بحيث إن $a^m = b a^m$, وهذا يؤدي $a^m = a r a^m$, لبعض $r \in R$. بما أن R حلقة موحدة يمنى فإن كل مثالي أيمن فيها يكون أساسياً . ليكن $r\left(ar\right) \cap a^m R \neq 0$, إذاً يوجد $0 \neq x \in r\left(ar\right) \cap a^m R$, ومنه نحصل على $arx = 0$ و $x = a^m z$ لبعض $z \in R$, إذاً $a r a^m z = 0$ وهذا يؤدي إلى أن $a^m z = 0 = x$, لذلك $r\left(ar\right) \cap a^m R = 0$, بما أن R حلقة موحدة و $a^m R \neq 0$, فإن $r\left(ar\right) = 0$. بما أن R حلقة عكوسة , $l\left(ar\right) = 0$, و(حسب القضية 2.4), ar عنصر له معكوس أيمن , وعليه يوجد $v \in R$ بحيث إن $arv = 1$, وبهذا $a\left(rv\right) = 1 \in M$ وهذا تناقض , لذلك $aR = R$. الآن , لتكن $ar = 1$, وبضربها في a مـــن جهـــة اليمـــين نحصـــل علـــى $ara = a$, وهـــذا يـــؤدي إلـــى $\left(1 - ra\right) \in r\left(a\right) = l\left(a\right) \subseteq l\left(ar\right) = r\left(ar\right) = 0$, (حسب القضية المساعدة 2.2) , لـــذلك $\left(1 - ra\right) = 0$, إذاً $ra = 1$ وعليه a له معكوس أيسر وبالتالي فإن R حلقة مقسومة.■

قضية 3.3:

ليكن I مثالياً في الحلقة R , إذا كانت R حلقة منتظمة من النمط – m , فإن R/I مقاس أيمن (أيسر) من النمط – GmF.

البرهان: واضح.

تعريف 3.4:

يقال للمثالي I في الحلقة R بأنه شبه أولي متمم (Completely semi-prime) إذا كان $a \in R$ وعدد صحيح موجب n بحيث إن $a^n \in I$, يؤدي إلى $a \in I$.

مبرهنة 3.5:

لتكن R حلقة و I مثالي شبه أولي متمم في R . فإن R/I مقاس أيسر من النمط – GmF ولكل $x \in I$, إذا وفقط إذا $I + r\left(x^m\right) = R$ لعدد صحيح موجب ثابت m.

البرهان:

نفترض أن R/I مقاس أيسر من النمط – GmF , ونفترض أيضاً $x \in I$, يوجد $b \in I$ وعدد صحيح موجب ثابت m , بحيث إن $x^m = x^m b$, فإن $x^m\left(1-b\right) = 0$, ومن ثمَّ فإن $\left(1-b\right) \in r\left(x^m\right)$, وكون $1 = b + \left(1-b\right)$, وعليه $R = I + r\left(x^m\right)$.

لإثبـــات العكـــس , نفتـــرض أن $R = I + r\left(x^m\right)$, فـــإن $1 = b + c$, حيـــث $b \in I$ و $c \in r\left(x^m\right)$, وبضربها في x^m من جهة اليسار نحصل على $x^m = x^m b + x^m c$, وهذا يؤدي إلى أن $x^m = x^m b$, وهذا يعني $x^m \in I$. بما أن I مثالي شبه أولي متمم , فإن $x \in I$ و $x^m = x^m b$ وهذا يؤدي إلى أن R/I مقاس أيسر من النمط – GmF.■

من القضية 3.3 ومبرهنة 3.5 نحصل على النتيجة الآتية.

نتيجة 3.6:

لتكن R حلقة منتظمة من النمط – m و I مثالي شبه أولي متمم في R , فإن $R = I + r\left(a^m\right)$ لكل $a \in I$ ولعدد صحيح موجب ثابت m.

القضية الآتية تعطي العلاقة بين الحلقات المختزلة والمقاسات اليمنى من النمط – GmF.

قضية 3.7:

لتكن R حلقة وM مثالياً أيمن أعظم في R , حيث R/M مقاس أيمن من النمط – GmF فإن R حلقة مختزلة إذا كان $l\left(a^m\right) \subseteq r\left(a\right)$ ولعدد صحيح موجب ثابت m.

البرهان:

نفترض أن a عنصر غير صفري في R , بحيث إن $a^2 = 0$. فإن $a \in r\left(a\right)$, الآن , ليكن M مثالياً أيمن أعظم يحتوي $r\left(a\right)$. بما أن $a \in r\left(a\right) \subset M$, فإن $a \in M$ وبما أن R/M مقاس أيمن من

النمط $-$ GmF , فإنه يوجد $b \in M$ وعدد صحيح موجب ثابت m , بحيث إن $a^m = ba^m$ وعليه $(1-b)a^m = 0$, وهذا يؤدي إلى أن $(1-b) \in l(a^m) \subseteq r(a)$, إذاً $(1-b) \in r(a) \subset M$, ومنها ينتج $1 \in M$, وهذا تناقض لكون $M \neq R$, لذلك فإن $a = 0$, وعليه R حلقة مختزلة.■

قضية 3.8:

لتكن R حلقة و M مثالياً أعظم حيث R/M مقاس أيمن من النمط $-$ GmF . فإن $r(a^m)$ مركبة جمع مباشر في R. إذا كان $l(a^m) \subseteq r(a)$ لكل $a \in R$ و m عدد صحيح موجب ثابت.

البرهان:

يجب أن نبرهن $r(a^m)$ مركبة جمع مباشر. أولاً ندعي أن $a^mR + r(a^m) = R$. إذا كان هذا الادعاء غير صحيح يوجد M مثالياً أيمن أعظم يحتوي $a^mR + r(a^m)$, الآن , R/M مقاس أيمن من النمط $-$ GmF , فإن $(a^m)^n = b(a^m)^n$, لبعض $b \in M$ ولعدد صحيح موجب ثابت n وهذا يؤدي $(1-b) \in l(a^{mn}) = r(a^m) \subseteq M$, (حسب قضية 3.6 R حلقة مختزلة) , أي أن $1 \in M$, وهذا تناقض. وعليه $a^mR + r(a^m) = R$. الآن , نلاحظ $a^mR \cap r(a^m) = 0$, (حسب القضية المساعدة 3.1). لذلك فإن $r(a^m)$ مركبة جمع مباشر في R.■

REFERENCES

[1] Brown, S. H. (1973), Rings over which every simple module is reationally complete, Canad. J. Math. 25, PP. 693 - 701.

[2] Cohn, P. M. (1999), Reversible rings, Bull. London Math. Soc. Vol. 31, PP. 641 - 648.

[3] Khalil, Sh. M. (2008), "On Generalized Pure Ideals", M. Sc. Thesis Mosul University.

[4] McCoy, N. H. (1939), Generalized regular rings , Bull. Amer. Math. Soc. Vol. 45, PP. 175 - 178.

[5] Rege, M. B. (1986), On Von Neumann regular rings and SF-rings, Math. Japonica , 31(6), PP. 927 - 936.

[6] Yue Chi Ming, R. (1985), On Von Neumann regular rings XII, Tamkang J. Math. 16 (4) , PP. 67 - 75.

[7] Yu, H. P. (1995), On quasi - duo rings, Glasgow Math. J. 37 , PP. 21 - 31.