w-Wiener Polynomials for Width Distance of Some Special Graphs

Ali A. Ali **Asma S. Aziz**
College of Computer Science and Mathematics
University of Mosul, Iraq

Received on: 19/04/2007 **Accepted on: 30/05/2007**

ABSTRACT

Let G be a k_0-connected graph ,and let $d_w(u,v), 1 \le w \le k_0$,be the w-width, distance between the two vertices u,v in G. The w-Wiener polynomial of the width distance of G is defined by:

$$W_w(G;x) = \sum_{u,v \in V(G)} x^{d_w(u,v)}$$

$W_w(G;x)$ is obtained in this paper for some special graphs G such as a cycle , a wheel, a theta graph , a straight hexagonal chain , and Wagner graph .The diameter with respect to the width distance – w, and the Wiener index for each such special graphs are also obtained in this paper.

Keywords: Wiener Polynomial, Width Distance, diameter, Wiener index.

متعددات حدود وينر–w للمسافة العرضية لبعض البيانات الخاصة

علي عزيز علي **أسماء صلاح عزيز**
كلية علوم الحاسبات والرياضيات، جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث :2007/04/19 **تاريخ قبول البحث :2007/05/30**

الملخص

ليكن G بيانا متصلاً عامل اتصاله k_0 وأن $1 \le w \le k_0$، وأن $d_w(u,v)$ هي المسافة العرضية–w بين الرأسين u و v في G . تُعرف متعددة حدود وينر –w نسبة للمسافة العرضية–w على أنها

$$W_w(G;x) = \sum_{u,v \in V(G)} x^{d_w(u,v)}$$

تضمن هذا البحث إيجاد $W_w(G;x)$ عندما يكون G بيانا خاصا كالدارة،والعجلة، وبيان ثيتا θ ،وبيان سلسلة سداسية مستقيمة ، وبيان واكنر . كما تضمن البحث إيجاد القطر بالنسبة إلى المسافة العرضية –w وإيجاد دليل وينر لكل من هذه البيانات الخاصة.

الكلمات المفتاحية: متعددة حدود وينر، المسافة العرضية، القطر، دليل وينر.

1.المقـدمة Introduction

بسبب تطور فن تشييد شبكات الحاسوب ذوات الاتصال الداخلي المتوازي فقد أصبح هنالك توجه كبير لأعمام مفهوم المسافة باتجاه معين [8].

ليكن u وv أي رأسين في بيان متصل G، تعرف **حاوية u وv** على أنها مجموعة دروب منفصلة داخليا التي تصل بين u وv ، ويرمز لها C(u,v).

يعرف **عرض(width)** الحاوية C(u,v) على أنه عدد الدروب u-v في C(u,v) ويرمز له w(C(u,v))، أي أن

$$w(C(u,v)) = |C(u,v)|$$

كما يعرف **طول الحاوية C(u,v)** على أنه الطول لأطول درب في الحاوية ويرمز له ℓ(C(u,v)) . وأخيرا لأجل عدد صحيح موجب w نعرف **المسافة العرضية** أو(المسافة−w) بين رأسين u وv في بيان G [8] على أنها

$$d_w(u,v|\ G) = \min_{C(u,v)} \ell(C(u,v)) \qquad .....(1.1)$$

حيث أن الأصغر يؤخذ على كل الحاويات C(u,v) ذات العرض w. وعندما لا يكون هناك التباس فسوف نعبر عن المسافة العرضية بين u وv بـ $d_w(u,v)$.

من الواضح أنه عندما يكون $w=1$ فان المسافة−w تصبح المسافة الاعتيادية بين u وv. وفي بحثنا سنحاول دراسة المسافة−w عندما $w \geq 2$ أما الحد الأعلى لـw فانه عامل الاتصال k_0 [3,4] للبيان G. أي أن $1 \leq w \leq k_0$، وسوف نستبعد حالة كون w=1 من دراستنا لأنها تمثل المسافة الاعتيادية والتي لها دراسات كثيرة ومتقدمة [6,8]. أما لو كانت $w > k_0$ فان المسافة $d_w(u,v)$ تعد غير معرفة. عندما $w \neq 1$ فسوف نأخذ الرأسين u وv مختلفين ولا نأخذ حالة كون u =v.

يعرف **القطر−w** لبيان G والذي يرمز له بـ $diam_w(G)$ أو اختصارا بـ $\delta_w(G)$ أو δ_w بأنه أكبر المسافات العرضية−w قي G أي أن:

$$\delta_w(G) = \max_{u,v \in V(G)} d_w(u,v|G) \qquad .....(1.2)$$

واضح أن $\delta_w(G) \geq \delta(G)$

أما **دليل وينر−w** فهو مجموع المسافات العرضية−w في البيان G أي:

$$W_w(G) = \sum_{u,v \in V} d_w(u,v|G) \qquad .....(1.3)$$

وأعماما لمتعددة حدود وينر نسبة لدالة المسافة الاعتيادية d [6] نعرف **متعددة حدود وينر−w** نسبة لدالة المسافة العرضية d_w كالأتي:

$$W_w(G;x)=\sum_{u,v\in V} x^{d_w(u,v)} \qquad .....(1.4)$$

فإذا كان $C_w(G,k)$ يمثل عدد الأزواج غير المرتبة للرؤوس التي تساوي المسافة العرضية−w بينها k فأن:

$$W_w(G;x)=\sum_{k\geq 2}^{\delta_w} C_w(G,k)\,x^k \qquad .....(1.5)$$

لأنه عندما يكون $w\geq 2$ فان المسافة−w لا تقل عن 2.

من الواضح أن

$$W_w(G)=\frac{d}{dx}W_w(G;x)\Big|_{x=1}=\sum_{k\geq 2}^{\delta_w} k\,C_w(G,k) \qquad .....(1.6)$$

يعرف **معدل المسافة العرضية−w** بأنه حاصل قسمة دليل وينر−w على عدد الأزواج غير المرتبة للرؤوس المختلفة وهو $\binom{p}{2}$ أي أن:

$$\mu_w(G)=W_w(G)\Big/\binom{p}{2} \qquad .....(1.7)$$

ليكن v رأسا في بيان متصل G ولنفرض أن $C_w(v,G,k)$ يمثل عدد رؤوس G التي كل منها تبعد بمسافة عرضية−w تساوي k عن الرأس v إذ أن $k\geq 2$ و $w\geq 2$.

واضح أن

$$\sum_{v\in V} C_w(v,G,k)=2C_w(G,k) \qquad .....(1.8)$$

لكل $2\leq k\leq \delta_w$

وتعرف **متعددة حدود وينر−w بالنسبة إلى الرأس v** بـ

$$W_w(v,G;x)=\sum_{k\geq 2}^{\delta_w} C_w(v,G,k)\,x^k \qquad .....(1.9)$$

من (1.5) و(1.8) و(1.9) نستنتج أن [1]

$$\sum_{v\in V} W_w(v,G;x)=2W_w(G;x) \qquad .....(1.10)$$

$$=2\sum_{k\geq 2}^{\delta_w} C_w(G,k)\,x^k=2W_w(G;x)\ .$$

تعريف: يقال لبيان متصل G أنه **منتظم نسبة للمسافة العرضية–w** إذا كان لكل k، $C_w(v,G,k)$ له القيمة نفسها لكل رأس v في G. أي أن عدد الرؤوس التي تبعد بمسافة عرضية-w قيمتها k عن الرأس v هو نفسه بالنسبة إلى كل v في G.

يمكن الحصول على متعددات حدود وينر–w ودليل وينر–w لكل من البيان التام Kp والثنائي التجزئة التام Kr,s كما هو مذكور أدناه:

$$W_w(K_p;x)=\frac{1}{2}p(p-1)x^2, \qquad 2\le w\le p-1, \qquad .....(1.11)$$

وعندئذ يكون

$$W_w(K_p)=p(p-1) \qquad .....(1.12)$$

$$W_w(K_{r,s};x)=\left[\binom{r}{2}+\binom{s}{2}\right]x^2+rs\,x^3, \qquad 2\le w\le \min\{r,s\}, \qquad .....(1.13)$$

$$W_w(K_{r,s})=r(r-1)+s(s-1)+3rs \qquad .....(1.14)$$

$$\mu_w(K_{r,s})=W_w(K_{r,s})\Big/\binom{r+s}{2}$$

2. الدارة C_p:

من الواضح أن عامل الاتصال للدارة C_p هو 2 وبذلك فان w=2. فإذا كان u وv أي رأسين مختلفين في C_p فان هناك دربين بين u وv منفصيلين داخليا ومجموع طوليهما هو p. لذلك فان طول الحاوية C(u,v) يكون إما d(u,v) أو $p-d(u,v)$ أيهما أكبر أي أن:

$$d_2(u,v)=\max\{d(u,v)\ ,\ p-d(u,v)\}$$

وبما أن

$$1\le d(u,v)\le\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor$$

فان

$$d_2(u,v)=p-d(u,v)$$

فعندما يكون d(u,v)=k فان هنالك p من أزواج الرؤوس {u,v} بحيث أن $d_2(u,v)=p-k$ لقيم $k=1,2,3,\ldots,\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor$ باستثناء حالة كون p عددا زوجيا فان عدد الأزواج للمسافة $d_2(u,v)=\frac{p}{2}$ هو $\frac{p}{2}$.

مما تقدم نستنتج متعددة حدود وينر $W_2(C_p;x)$ كما في المبرهنة الآتية:

مبرهنة 2.1 : لكل $p \geq 3$ لدينا:

$$W_2(C_p;x)=\begin{cases} p(x^{p-1}+x^{p-2}+...+x^{(p+1)/2}), & \text{when p is odd} \\ p(x^{p-1}+x^{p-2}+...+x^{1+p/2}+\frac{1}{2}x^{p/2}), & \text{when p is even} \end{cases}$$

باستخراج مشتقة $W_2(C_p;x)$ عندما x=1 نحصل على دليل وينر $W_2(C_p)$ وبالقسمة على $\binom{p}{2}$ نحصل على معدل المسافة العرضية $\mu_2(C_p)$ كما هو مدون في النتيجة الآتية:

نتيجة 2.2 : لكل $p \geq 3$ لدينا:

$$W_2(C_p)=\begin{cases} p(p-1)(3p-1)/8; & \text{when p is odd} \\ p^2(3p-4)/8; & \text{when p is even} \end{cases}$$

$$\mu_2(C_p)=\begin{cases} (3p-1)/4; & \text{when p is odd} \\ p(3p-4)/4(p-1); & \text{when p is even} \end{cases}$$

3.العجلة W_p :

واضح أن العجلة تتكون من دارة C_{p-1} مع رأس v_p متجاور مع كل رؤوس C_{p-1}. كما أن هنالك ثلاثة دروب منفصلة داخليا بين كل رأسين مختلفين من رؤوس W_p ، بفرض أن $p \geq 5$. لذلك فسوف نعالج حالة كون w =2 ومن ثم نجد متعددة الحدود لحالة كون w =3.

(a) نفرض أن $w = 2$ ونأخذ رأسين v_i و v_j مختلفين من رؤوس C_{p-1} فنجد أن هنالك دربا (v_i, v_p, v_j) بطول 2 ودربا آخر منفصلا عنه بطول $d(v_i, v_j|C_{p-1})$. فإذا كان $v_iv_j \notin E(W_p)$ فان

$$d_2(v_i, v_j) = d(v_i, v_j|C_{p-1}) \qquad .....(3.1)$$

وإذا كان v_i و v_j متجاورين فان

$$d_2(v_i, v_j) = 2 \qquad .....(3.2)$$

فضلا عن ذلك، فان

$$d_2(v_i, v_p) = 2 \qquad .....(3.3)$$

لكل رأس v_i من رؤوس C_{p-1}

وعليه مما تقدم نستنتج أن:

$$W_2(W_p;x) = 2(p-1)x^2 + W(C_{p-1};x) - (p-1)(x+1) \qquad .....(3.4)$$

(b) نفرض أن $w = 3$. وواضح أن هنالك لكل رأس u في C_{p-1} حاوية $C(u,v_p)$ تتكون من دربين بطول 2 مع درب بطول واحد وعليه فان

$$d_3(u,v_p) = 2, \quad u \in V(C_{p-1}) \qquad .....(3.5)$$

والآن نأخذ رأسين مختلفين v_i و v_j من $V(C_{p-1})$ فنلاحظ أن الحاوية $C(v_i,v_j)$ المكونة من ثلاثة دروب هي v_i, v_p, v_j مع دربي $v_i - v_j$ في الدارة C_{p-1} . وبذلك

$$d_3(v_i,v_j) = d_2(v_i,v_j \mid C_{p-1}) \qquad .....(3.6)$$

وكذلك نستنتج من (3.5) و(3.6) أن:

$$W_3(W_p;x) = (p-1)x^2 + W_2(C_{p-1};x) \qquad .....(3.7)$$

وأخيرا باستخدام [6] ومبرهنة 1.2 نحصل على المبرهنة الآتية:

مبرهنة3.1:

(a) لأجل $p \geq 8$ فان:

$$W_2(W_p;x) = \begin{cases} (p-1)(3x^2 + x^3 + ... + x^{(p-2)/2}); & \text{when } p \text{ is even} \\ (p-1)(3x^2 + x^3 + ... + x^{(p-3)/2} + \frac{1}{2}x^{(p-1)/2}); & \text{when } p \text{ is odd} \end{cases}$$

(b) لأجل $p \geq 5$ فان:

$$W_3(W_p;x) = (p-1)x^2 + \begin{cases} (p-1)(x^{p-2} + x^{p-3} + ... + x^{p/2}); & \text{when } p \text{ is even} \\ (p-1)(x^{p-2} + x^{p-3} + ... + x^{(p+1)/2} + \frac{1}{2}x^{(p-1)/2}); & \text{when } p \text{ is odd} \end{cases}$$

ملاحظة3.2: في حالة كون $w = 2$ و $5 \leq p \leq 7$ فان متعددات الحدود $W_2(W_p;x)$ هي:

$$W_2(W_5;x) = 10x^2,$$
$$W_2(W_6;x) = 15x^2,$$
$$W_2(W_7;x) = 18x^2 + 3x^3,$$

ولأجل إيجاد $W_2(W_p)$ و $W_3(W_p)$ نأخذ مشتقة $W_2(W_p;x)$ و $W_3(W_p;x)$ المعطاة في مبرهنة 3.1 عندما $x=1$. فنحصل على:

نتيجة3.3:

(a) لأجل $p \geq 8$ فان لدينا:

$$W_2(W_p)=\begin{cases}(p-1)(p^2-2p+24)/8; & \text{when } p \text{ is even}\\ (p-1)^3/8+3(p-1); & \text{when } p \text{ is odd}\end{cases}$$

(b) لأجل $p \geq 5$ فأن لدينا:

$$W_3(W_p)=\begin{cases}(p-1)(3p^2-10p+24)/8; & \text{when } p \text{ is even}\\ (p-1)(3p^2-10p+23)/8; & \text{when } p \text{ is odd}\end{cases}$$

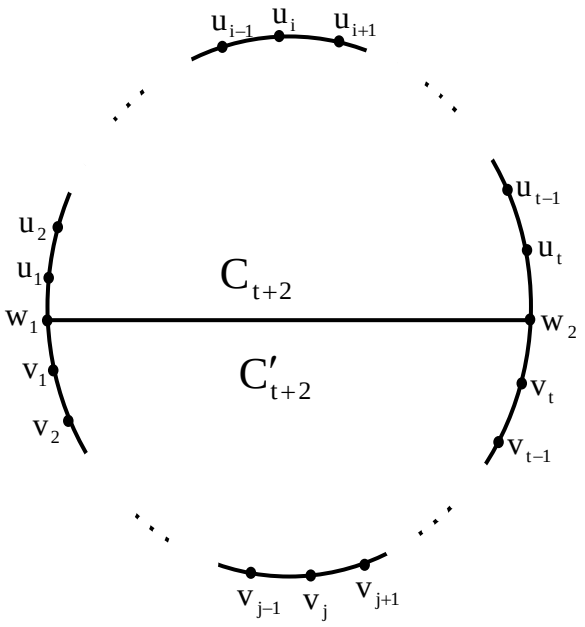
من السهل إيجاد معدل المسافة العرضية $\mu_w(W_p)$ بالقسمة على $\binom{p}{2}$ وباستخدام نتيجة3.3وهو:

$$\mu_2(W_p)=\frac{1}{4p}\begin{cases}(p^2-2p+24); & \text{when } p \text{ is even}\\ (p^2-2p+25); & \text{when } p \text{ is odd}\end{cases}$$

$$\mu_3(W_p)=\frac{1}{4p}\begin{cases}(3p^2-10p+24); & \text{when } p \text{ is even}\\ (3p^2-10p+23); & \text{when } p \text{ is odd}\end{cases}$$

4.بيان ثيتا (θ) :Theta Graph

تعريف4.1: يعرف بيان θ_t بأنه بيان مكون من دارة زوجية مع حافة تصل رأسين w_1 و w_2 متقابلين فيها، كما مبين في الشكل4.1 وبذلك فان θ_t، $t \geq 1$، يتكون من دارتين C_{t+2} و C'_{t+2} كل منهما تحتوي الحافة w_1w_2. وسوف نرمز لرؤوس C_{t+2} بالترتيب $w_1,u_1,u_2,\dots u_t,w_2$ ولرؤوس C'_{t+2} بالترتيب $w_1,v_1,v_2,\dots v_t,w_2$.



الشكل 4.1 بيان θ_t

من الواضح أن

$$p(\theta_t) = 2(t+1) \ , \ q(\theta_t) = 2t+3$$

ومن ملاحظة الشكل1.4 يتبين لنا أن عامل الاتصال يساوي 2، وبذلك فان لدينا $w = 2$ فقط.

ومن الواضح أن القطر للمسافة العرضية−2 هو 2t لأن

$$\mathrm{diam}_2\, \theta_t = d_2(u_t, v_t) = d_2(u_1, v_1) = 2t$$

لأجل إيجاد متعددة حدود وينر للمسافة العرضية−2 نفرض أن $V_1 = V(C_{t+2})$ و $V_2 = V(C'_{t+2})$.

إذا كان $u, u' \in V_1$، فان الحاوية $C(u,u')$ الصغرى تكون ضمن الدارة C_{t+2}، وهذا يعني أن المسافة العرضية−2 للرأسين u و u' هي:

$$d_2(u,u'|\theta_t) = d_2(u,u'|C_{t+2})$$

وعليه فان متعددة الحدود لأزواج الرؤوس في V_1 هي:

$$\sum_{u,u'\in V_1} x^{d_2(u,u')} = W_2(C_{t+2};x) \qquad .....(4.1)$$

وبالمثل فان متعددة الحدود لأزواج الرؤوس في V_2 هي:

$$\sum_{v,v'\in V_2} x^{d_2(v,v')} = W_2(C'_{t+2};x) = W_2(C_{t+2};x) \qquad .....(4.2)$$

وبسبب تكرار الرأسين w_1 و w_2 يجب إيجاد المسافة العرضية–2 بينهما والتي هي:

$$d_2(w_1,w_2|\theta_t) = t+1$$

ويبقى إيجاد المسافات $d_2(u_i,v_j)$ حيث أن $i,j = 1,2,\dots,t$ إن الحاوية $C(u_i,v_j)$ ذات أقل طول (أي التي طولها يساوي المسافة العرضية–2 للزوج $\{u_i,v_j\}$) تتكون من الدربين الآتيين:

$$P_1 : u_i, u_{i-1}, u_{i-2}, \dots, u_2, u_1, w_1, v_1, v_2, \dots, v_j$$

$$P_2 : u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_{t-1}, u_t, w_2, v_t, v_{t-1}, \dots, v_j$$

من الواضح أن

$$\ell(P_1) = i + j$$

وأن

$$\ell(P_2) = 2t - i - j + 2$$

والآن نجد قيم i وj التي تجعل $\ell(P_1) \le \ell(P_2)$ ومن ثم نجد القيم التي تجعل $\ell(P_1) > \ell(P_2)$.

فإذا كان $\ell(P_1) \le \ell(P_2)$، أي

$$i + j \le 2t - i - j + 2 \qquad .....(4.3)$$

هذه العلاقة تعطي قيم i بدلالة jالتي تجعل $d_2(u_i,v_j) = \ell(P_2)$.

ومنها نحصل على

$$\begin{aligned} &2i \le 2t - 2j + 2 \\ &\Rightarrow i \le t - j + 1 \qquad .....(4.4) \\ &\Rightarrow 1 \le i \le t - j + 1 \end{aligned}$$

إن قيم i التي لا تحقق هذه المتباينة يكون فيها $d_2(u_i,v_j) = \ell(P_1)$.

ومما تقدم وبالاعتماد على المتباينة (2.3.4) نحصل على:

$$\sum_{i=1}^{t} x^{d_2(u_i,v_j)} = \sum_{i=1}^{t-j+1} x^{2t-i-j+2} + \sum_{i=t-j+2}^{t} x^{i+j} \qquad .....(4.5)$$

هذه الصيغة للرأس v_j نسبة إلى الرؤوس u_i و $1 \le i \le t$ ،وقيم j التي تحقق هذه الصيغة هي $2 \le j \le t$. أما فيما يتعلق بالرأس v_1 مع الرؤوس u_i ، $1 \le i \le t$، فان متعددة الحدود الناتجة لكل الأزواج $\{u_i, v_1\}$ ، $1 \le i \le t$ تكون

$$\sum_{i=1}^{t} x^{d_2(v_1,u_i)} = \sum_{i=1}^{t} x^{2t-i+1} \qquad .....(4.6)$$

(لاحظ الشكل4.1).

وبأخذ المجموع للعلاقة (4.5) لقيم $2 \le j \le t$ وجمعها مع العلاقة (4.6) نحصل على

$$\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{t} x^{d_2(u_i,v_j)} = \sum_{j=2}^{t}\left(\sum_{i=1}^{t-j+1} x^{2t-i-j+2} + \sum_{i=t-j+2}^{t} x^{i+j}\right) + \sum_{i=1}^{t} x^{2t-i+1} \qquad .....(4.7)$$

وعند إجراء التبسيط الجبري على هذه العلاقة نحصل على الصيغة الآتية:

$$\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{t} x^{d_2(u_i,v_j)} = (x^{t+1} + x^{t+2})\sum_{k=0}^{t-2}(t-k-1)x^k + \sum_{i=1}^{t} x^{2t-i+1} \qquad .....(4.8)$$

وبجمع العلاقتين (4.1) و(4.2) مع العلاقة (4.8) وطرح x^{t+1} ، نحصل على متعددة حدود وينر للمسافة العرضية−2 لبيان θ_t وكما هي في المبرهنة الآتية:

مبرهنة4.2: عندما تكون $t \ge 2$ فان

$$W_2(\theta_t;x) = 2W_2(C_{t+2};x) - x^{t+1} + (x^{t+1} + x^{t+2})\sum_{k=0}^{t-2}(t-k-1)x^k + \sum_{i=1}^{t} x^{2t-i+1}$$

حيث أن

$$W_2(C_{t+2};x) = \begin{cases} (t+2)\sum_{k=(t+3)/2}^{t+1} x^k, & \text{when } t \text{ is odd} \\ (t/2+1)x^{t/2+1} + (t+2)\sum_{k=t/2+2}^{t+1} x^k, & \text{when } t \text{ is even} \end{cases}$$

#

وبأخذ مشتقة $W_2(\theta_t;x)$ عندما x=1 وتبسيط النتائج نحصل على:

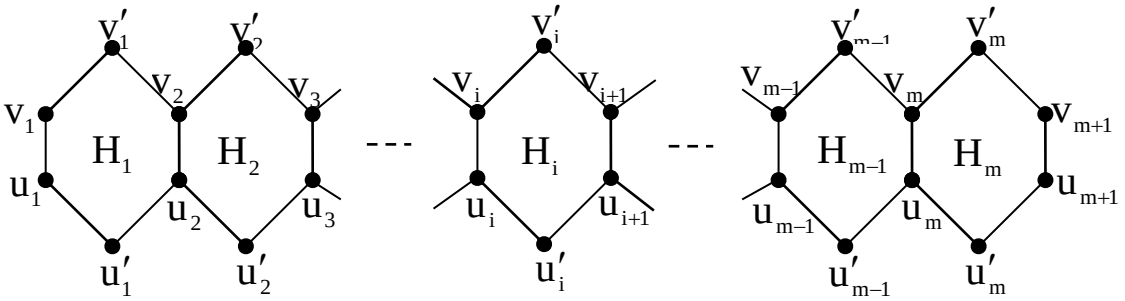
نتيجة4.3: دليل وينر للمسافة العرضية−2 لبيان θ_t هو

$$W_2(\theta_t)=\begin{cases}(t/12)(25t^2+54t+44)+1, & \text{when } t \text{ is even}\\ (t/12)(25t^2+54t+47)+3/2, & \text{when } t \text{ is odd}\end{cases}$$

5.بيان سلسلة سداسية مستقيمة: A graph of straight hexagonal chain

في استخدام البيانات لتمثيل جزئيات مركبات الكربوهيدرات نصادف أنظمة سداسية الحلقات متصلة مع بعضها البعض بأسلوب معين. وقد كانت هنالك دراسة لدليل وينر لهذه البيانات [5,7]. وفي هذا البند ندرس نوعا معينا من هذه البيانات يسمى بيان سلسلة سداسية مستقيمة.

تعريف5.1: يتكون البيان لسلسلة سداسية مستقيمة من عدد m من الحلقات السداسية كل منها يشترك مع الحلقة التي تليها بحافة واحدة بحيث أن الخط الواصل بين مراكزها (على إعتبار أن جميع الحلقات مضلعات سدسية منتظمة ومتطابقة) يكون مستقيما كما هو مبين في الشكل5.1إذ أن كل حلقة ممثلة بمضلع سداسي منتظم. ونرمز لهذا البيان بـ G_m وسوف نرمز للحلقات بـ $H_1, H_2, \dots, H_m$.



الشكل5.1بيان سلسلة سداسية مستقيمة

واضح أن $q(G_m)=5m+1$ و $p(G_m)=4m+2$

نرمز لرؤوس الحلقة H_i بـ $v_i, v'_i, v_{i+1}, u_{i+1}, u'_i, u_i$ كما هو مثبت في الشكل5.1.

بملاحظة هذا البيان G_m نجد أن عامل الاتصال له هو 2، وعليه فسوف نجد المسافة العرضية–2.

وفيما يتعلق بقطر المسافة العرضية–2 (أي القطر–2) فانه يساوي المسافة العرضية بين الرأسين v'_m و v'_1 أو بين الرأسين u'_m و u'_1، أي أن:

$$\operatorname{diam}_2 G_m = \max_{u,v\in V(G_m)} \{d_2(u,v)\} = d_2(v'_1, v'_m) = d_2(u'_1, u'_m)$$

إذا

$$\mathrm{diam}_2\, G_m = 2m+4 \qquad .....(5.1)$$

المبرهنة الآتية تعطينا متعددة حدود وينر للمسافة العرضية−2 للبيان G_m ، $m \geq 2$. إذا كانت $m=1$ فان $G_1 = C_6$ وان

$$W_2(C_6;x) = 6x^5 + 6x^4 + 3x^3 \qquad .....(5.2)$$

مبرهنة5.2: لأجل $m \geq 2$ ، فان

$$W_2(G_m;x) = 3m(1+2x)x^3 + (5m+1)x^5 + 2(2+3x+2x^2+x^3)x^3\sum_{j=1}^{m-1}(m-j)x^{2j} \qquad .....(5.3)$$

البرهان: لإثبات (5.3) نستخدم مبدأ الاستقراء الرياضي على m.

إذا كانت $m=2$، فان:

$$W_2(G_2;x) = 6x^3 + 12x^4 + 15x^5 + 6x^6 + 4x^7 + 2x^8 \qquad .....(5.4)$$

ونفرض أن متعددة حدود وينر للمسافة العرضية−2، $W_2(G_{m-1};x)$ ، معلومة ونحاول إيجاد $W_2(G_m;x)$ لأجل $m \geq 3$.

وبمقارنة G_m و G_{m-1} في الشكل5.1 نجد أن

$$W_2(G_m;x) = W_2(G_{m-1};x) + W_2(C_6;x) + F(x) - x^5 \qquad .....(5.5)$$

حيث أن

$$F(x) = \sum_{u,v} x^{d_2(u,v)}$$

لكل

$$v \in V(G_{m-1}) - \{v_m, u_m\},\ u \in A = \{v'_m, v_{m+1}, u_{m+1}, u'_m\}$$

والآن نجد صيغة للدالة $F(x)$ لتعويضها في (5.5) نلاحظ أن المسافة $d_2(u,v)$ في البيان G_m هي نفسها في الدارة $C_{6+4(m-i)}$ ، $i = 1,2,\ldots,m-1$ ، عندما يكون:

$$u \in A\ ,\ v \in \{v_i, v'_i, u_i, u'_i\}$$

وإذ ندرس المسافة العرضية−2 للرأسين v'_m و u'_m مع رؤوس المجموعة $A_i = \{v_i, v'_i, u_i, u'_i\}$ ، عندما يكون $i = 1,2,\ldots,m-1$ ، نجد أن

$$d_2(v'_m, v_i) = d_2(u'_m, u_i) = 5 + 2(m-i)$$
$$d_2(v'_m, v'_i) = d_2(u'_m, u'_i) = 6 + 2(m-i)$$
$$d_2(v'_m, u_i) = d_2(u'_m, v_i) = 4 + 2(m-i)$$

$$d_2(v'_m, u'_i) = d_2(u'_m, v'_i) = 3 + 2(m-i)$$

كما أن المسافة للرأسين v_{m+1} و u_{m+1} مع رؤوس المجموعة A_i ذاتها تكون كالأتي

$$d_2(v_{m+1}, v_i) = d_2(u_{m+1}, u_i) = 4 + 2(m-i)$$
$$d_2(v_{m+1}, v'_i) = d_2(u_{m+1}, u'_i) = 5 + 2(m-i)$$
$$d_2(v_{m+1}, u_i) = d_2(u_{m+1}, v_i) = 3 + 2(m-i)$$
$$d_2(v_{m+1}, u'_i) = d_2(u_{m+1}, v'_i) = 4 + 2(m-i)$$

ومن هذه المسافات وبأخذ المجموع لكل i نستنتج صيغة $F(x)$ وهي:

$$F(x) = 2\sum_{i=1}^{m-1}(x^{6+2(m-i)} + 2x^{5+2(m-i)} + 3x^{4+2(m-i)} + 2x^{3+2(m-i)}) \qquad .....(5.6)$$

وبعد تعويضها في العلاقة (5.5) نحصل على:

$$W_2(G_m; x) = W_2(G_{m-1}; x) + 2\sum_{i=1}^{m-1}(x^{6+2(m-i)} + 2x^{5+2(m-i)} + 3x^{4+2(m-i)}$$
$$+ 2x^{3+2(m-i)}) + W_2(C_6; x) - x^5 \qquad .....(5.7)$$

لأجل التبسيط نفرض أن $j = m - i$ ، حيث أن $1 \le j \le m-1$. وليكن

$$z_j = x^{6+2j} + 2x^{5+2j} + 3x^{4+2j} + 2x^{3+2j} \qquad .....(5.8)$$

عندها يكون

$$W_2(G_m; x) = W_2(G_{m-1}; x) + W_2(C_6; x) - x^5 + 2\sum_{j=1}^{m-1} z_j \qquad .....(5.9)$$

ومنها نحصل على أن

$$W_2(G_{m-1}; x) = W_2(G_{m-2}; x) + W_2(C_6; x) - x^5 + 2\sum_{j=1}^{m-2} z_j \qquad .....(5.10)$$

كذلك

$$W_2(G_{m-2}; x) = W_2(G_{m-3}; x) + W_2(C_6; x) - x^5 + 2\sum_{j=1}^{m-3} z_j \qquad .....(5.11)$$

وهكذا فان

$$W_2(G_3; x) = W_2(G_2; x) + W_2(C_6; x) - x^5 + 2\sum_{j=1}^{2} z_j \qquad .....(5.12)$$

$$W_2(G_2; x) = 2W_2(C_6; x) - x^5 + 2z_1 \qquad .....(5.13)$$

ومما تقدم من المعادلات نحصل على أن

$$W_2(G_m;x)=2\left(\sum_{j=1}^{1} z_j+\sum_{j=1}^{2} z_j+\sum_{j=1}^{3} z_j+\dots+\sum_{j=1}^{m-1} z_j\right)$$
$$+mW_2(C_6;x)-(m-1)x^5 \qquad .....(5.14)$$

$$\therefore W_2(G_m;x)=3mx^3(1+2x+2x^2)-(m-1)x^5+2\sum_{j=1}^{m-1}(m-j)z_j$$
$$=3mx^3(1+2x)+(5m+1)x^5+2\sum_{j=1}^{m-1}(m-j)z_j \qquad .....(5.15)$$

وبالتعويض عن z_j المذكورة في (5.8) نحصل على (5.3) وبهذا يتم البرهان.

نتيجة5.3: دليل وينر للمسافة العرضية−2 للبيان G_m هو

$$W_2(G_m)=(16/3)m(m^2-4)+54m^2+5 \qquad .....(5.16)$$

البرهان:

بعد اشتقاق العلاقة (5.3) والتعويض عن x=1 نحصل على العلاقة (5.16) .

6.بيان واكنر: Wagner graph

تعريف6.1: بيان واكنر [4]هو بيان مكون من دارة برتبة زوجية مع الحافات التي كل واحدة منها تصل رأسين يبعدان عن بعضهما البعض في الدارة المذكورة بمسافة ثابتة تساوي نصف عدد الرؤوس.

ولأجل توضيح هذا التعريف نفرض أن عدد الرؤوس يساوي t وأن t =2m. ونرمز لهذا البيان بـ R_t . ولتكن مجموعة رؤوسه كالأتي:

$$V(R_t)=\{v_1,v_2,\ \dots\ ,v_{2m}\}$$

عندها تكون مجموعة حافاته

$$E(R_t)=E(C_{2m})\cup\{v_iv_{m+i}\mid i=1,2,\dots,m\}$$

كما موضح في الشكل6.1.

عامل الاتصال لبيان R_t يساوي3. يعني أن $2\le w\le 3$. وعندما حاولنا إيجاد متعددة حدود وينر للمسافة العرضية−w لهذا البيان لاحظنا فيها حالتين مختلفتين والاختلاف سببه عدد الرؤوس t.

الحالة الأولى إذا كانت الرتبة t ليست من مضاعفات العدد4 . والحالة الثانية عندما تكون t من مضاعفات العدد4 .

وأخيرا لا بد أن نذكر أن R_t هو بيان منتظم بالنسبة إلى المسافة العرضية. لهذا سنحاول إيجاد متعددة الحدود لرأس واحد من رؤوسه في كل من الحالات التي سوف نتناولها.

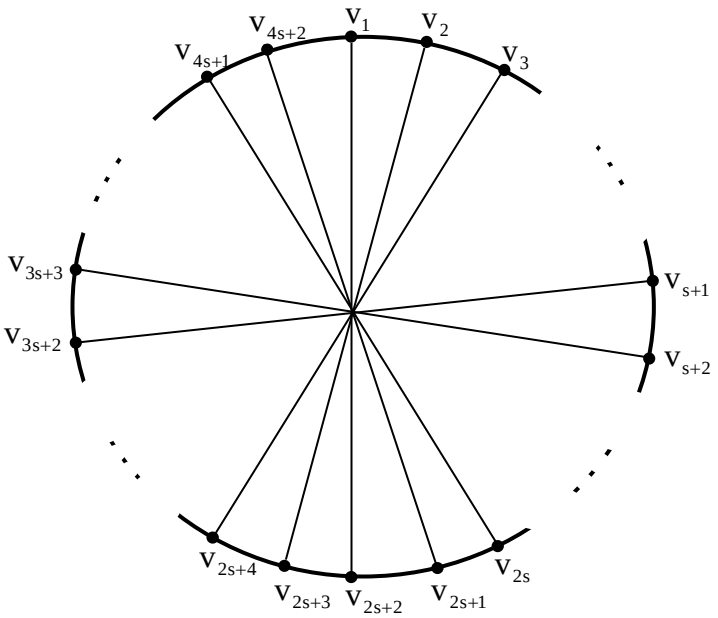
بما أن t عدد زوجي فان الحالتين هما t=4s+2، $(s \geq 1)$ و $t = 4s$، $(s \geq 2)$.

عبارة:6.2 إذا كانت $t = 4s + 2$ ، $s \geq 1$، فان:

$$W_2(R_t;x) = (2s+1)x^3 + t\,x\sum_{i=2}^{s+1} x^i + t\,x^2 \sum_{i=s+2}^{2s+1} x^{2s+1-i} \qquad .....(6.1)$$

البرهان:

البيان R_t في الشكل6.1 يمثل هذه الحالة.



الشكل6.1 بيان واكنر R_{4s+2}

نجد متعددة الحدود بالنسبة إلى المسافة العرضية–2 للرأس v_1، فإذا كان $i = 2,3, \ldots ,s+1$، فان الحاوية $C(v_1, v_i)$ الصغرى تتكون من الدربين:

$$P_1 : v_1, v_2, v_3, \ldots , v_i$$

$$P_2 : v_1, v_{2s+2}, v_{2s+3}, \ldots , v_{2s+i+1}, v_i$$

ومن الواضح أن

$$\ell(P_1) = i - 1 \ , \ \ell(P_2) = i + 1$$

وعليه فان

$$d_2(v_1,v_i)=\max\{\ell(P_1),\ell(P_2)\}=i+1 \qquad .....(6.2)$$

حيث $i=2,3,4,\ \dots\ ,s+1$.

وإذا كانت $i=s+2,s+3,\dots,2s+1$، فان الحاوية $C(v_1,v_i)$ الصغرى تتكون من الدربين:

$$P_1: v_1,v_{2s+2},v_{2s+1},\ \dots\ ,v_{i+1},v_i$$

$$P_2: v_1,v_{4s+2},v_{4s+1},v_{4s},\ \dots\ ,v_{2s+1+i},v_i$$

ومن الواضح أن

$$\ell(P_1)=\ell(P_2)=2s-i+3$$

وعليه فان

$$d_2(v_1,v_i)=2s-i+3 \qquad .....(6.3)$$

عندما تكون $i=s+2,s+3,\dots,2s+1$.

من (6.2) و (6.3) نحصل على

$$\sum_{i=2}^{2s+1}x^{d_2(v_1,v_i)}=\sum_{i=2}^{s+1}x^{i+1}+\sum_{i=s+2}^{2s+1}x^{2s-i+3} \qquad .....(6.4)$$

وبما أنه لكل قيمة من قيم i، $2\le i\le 2s+1$، يكون

$$d_2(v_1,v_i)=d_2(v_1,v_{t-i+2}) \qquad .....(6.5)$$

فان هذه العلاقة تعطينا، وبعد التعويض عن قيمi، المسافات للرأس v_1 نسبة إلى الرؤوس للجهة المقابلة، أي الرؤوس $v_{2s+3},v_{2s+4},\ \dots\ ,v_{4s+2}$ولهذا تضرب العلاقة (6.4) بالعدد2.

بقي أن نذكر أن:

$$d_2(v_1,v_{2s+2})=3$$

وبالاعتماد على ما تقدم نحصل على متعددة الحدود للمسافة العرضية−2 للرأس v_1، وهي:

$$W_2(v_1,R_t;x)=x^3+2\sum_{i=2}^{s+1}x^{i+1}+2\sum_{i=s+2}^{2s+1}x^{2s-i+3} \qquad .....(6.6)$$

ولما كان R_t منتظما بالنسبة إلى المسافة العرضية فان:

$$W_w(R_t;x)=(t/2)W_w(v_1,R_t;x) \qquad .....(6.7)$$

حيث $2\le w\le 3$.

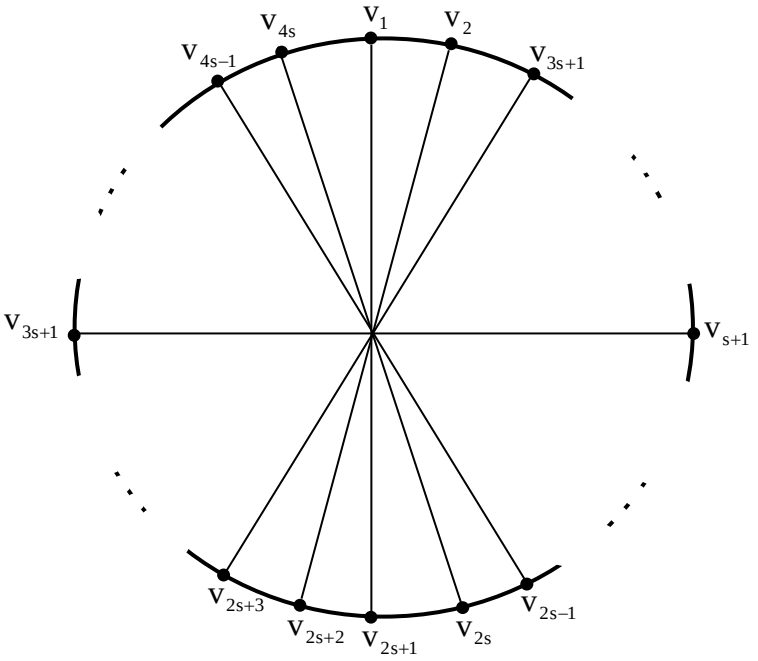
وأخيرا بالتعويض والتبسيط نحصل من (6.6) و (6.7) على (6.1).وبهذا يتم البرهان.

عبارة:6.3 إذا كانت t=4s، حيث $s\ge 2$، فان:

$$W_2(R_t;x) = 2s\,x^3 + t\,x\sum_{i=2}^{s} x^i + t\,x^2\sum_{i=s+1}^{2s} x^{2s-i} \qquad .....(6.8)$$

البرهان:

البيان R_t في الشكل6.2 يمثل هذه الحالة.



الشكل6.2 بيان واكنر R_{4S}

كما في إثبات العبارة 6.2 فسوف نجد متعددة حدود وينر للمسافة العرضية–2 للرأس v_1 بسبب انتظام البيان بالنسبة إلى المسافة العرضية–w.

إذا كان $i = 2,3,4, \ldots ,s$ فان الحاوية الصغرى $C(v_1, v_i)$ تتكون من الدربين

$$P_1 : v_1, v_2, v_3, \ldots , v_i$$

$$P_2 : v_1, v_{2s+1}, v_{2s+2}, \ldots , v_{2s+i}, v_i$$

ومن الواضح أن

$$\ell(P_1) = i-1 \ , \ \ell(P_2) = i+1$$

وهكذا فان المسافة العرضية–2

$$d_2(v_1, v_i) = i+1 \ , \quad i = 2,3,4, \ldots ,s \qquad .....(6.9)$$

وإذا كان $i = s+1, s+2, \ldots, 2s$ ، فان الحاوية $C(v_1, v_i)$ الصغرى تتكون من الدربين

$$P_1 : v_1, v_{2s+1}, v_{2s}, \ldots, v_{i+2}, v_{i+1}, v_i$$

$$P_2 : v_1, v_{4s}, v_{4s-1}, \ldots, v_{i+2s+2}, v_{i+2s+1}, v_{i+2s}, v_i$$

وواضح أن

$$\ell(P_1) = \ell(P_2) = 2s - i + 2$$

وبهذا نحصل على المسافة العرضية−2

$$d_2(v_1, v_i) = 2s - i + 2 \ , \quad i = s+1, s+2 \ \ldots, 2s \qquad \ldots..(6.10)$$

وهكذا من (6.9) و(6.10) نحصل على

$$\sum_{i=2}^{2s} x^{d_2(v_1,v_i)} = \sum_{i=2}^{s} x^{i+1} + \sum_{i=s+1}^{2s} x^{2s-i+2} \qquad \ldots..(6.11)$$

كما نلاحظ أن لكل $2 \le i \le 2s$.

$$d_2(v_1, v_i) = d_2(v_1, v_{t-i+2}) \qquad \ldots..(6.12)$$

وبذلك فان متعددة الحدود للمسافة العرضية−2 للرأس v_1 مع جميع رؤوس R_t ماعدا الرأس v_{2s+1} هي ضعف متعددة الحدود (6.11) ولما كان $d_2(v_1, v_{2s+1}) = 3$ فان

$$W_2(v_1, R_t; x) = x^3 + 2\sum_{i=2}^{s} x^{i+1} + 2\sum_{i=s+1}^{2s} x^{2s-i+2} \qquad \ldots..(6.13)$$

وباستخدام (6.7) نحصل على (6.8) وبهذا يتم البرهان.

يمكن أن نوحد العبارتين6.2 و 6.3 في مبرهنة واحدة لسهولة الرجوع إليها.

مبرهنة6.4: متعددة حدود وينر للمسافة العرضية−2 لبيان واكنر R_t برتبة t هي:

$$W_2(R_t; x) = \begin{cases} 2s\,x^3 + t\,x\sum_{i=2}^{s} x^i + t\,x^2 \sum_{i=s+1}^{2s} x^{2s-i} \ , & \text{when } t = 4s, s \ge 2 \\ (2s+1)x^3 + t\,x\sum_{i=2}^{s+1} x^i + t\,x^2 \sum_{i=s+2}^{2s+1} x^{2s+1-i} \ , & \text{when } t = 4s+2, s \ge 1 \end{cases}$$

باشتقاق $W_2(R_t; x)$ بالنسبة إلى x وتعويض x=1 نحصل من المبرهنة 2.5.4 على النتيجة الآتية:

نتيجة6.5: دليل وينر للمسافة العرضية−2 لبيان واكنر R_t هو

$$W_2(R_t)=\begin{cases}4s(s^2+3s-1/2), & \text{when } t=4s, s\ge 2\\ 2s(2s^2+9s+7)+3, & \text{when } t=4s+2, s\ge 1\end{cases}$$

الآن نعالج حالة كون $w=3$ وهنا أيضا لدينا حالتان لقيم t، إما $t=4s+2$ ، $(s\ge 1)$ أو $t=4s$ ، $(s\ge 2)$.

عبارة6.6: إذا كانت $t=4s+2$ ، $s\ge 1$ ، فان

$$W_3(R_t;x)=(2s+1)x^3+t\,x^3\sum_{i=2}^{s+1}x^{2s-i}+t\sum_{i=s+2}^{2s+1}x^{i-1} \qquad .....(6.14)$$

البرهان:

عندما تكون $2\le i\le 2s+1$ ، فان الحاوية $C(v_1,v_i)$ الصغرى هي المكونة من الدروب:

$P_1: v_1,v_2,v_3,\ \dots\ ,v_i$

$P_2: v_1,v_{2s+2},v_{2s+1},\ \dots\ ,v_{i+2},v_{i+1},v_i$

$P_3: v_1,v_{4s+2},v_{4s+1},\ \dots\ ,v_{2s+i+1},v_i$

ومن الواضح أن

$$\ell(P_1)=i-1\,,\ \ell(P_2)=\ell(P_3)=2s+3-i$$

ولما كان $2s+3-i>i-1$ ، عندما تكون $2\le i\le s+1$.

فانه لأجل $2\le i\le s+1$

$$d_3(v_1,v_i)=2s-i+3 \qquad .....(6.15)$$

ولما كان $2s-i+3\le i-1$ عندما $s+2\le i\le 2s+1$ ، فان

$$d_3(v_1,v_i)=i-1 \qquad .....(6.16)$$

مما تقدم في (6.15) و(6.16) نجد أن متعددة الحدود للمسافة العرضية–3 بين الرأس v_1 والرؤوس $\{v_i: 2\le i\le 2s+1\}$ هي:

$$\sum_{i=2}^{2s+1}x^{d_3(v_1,v_i)}=\sum_{i=2}^{s+1}x^{2s-i+3}+\sum_{i=s+2}^{2s+1}x^{i-1} \qquad .....(6.17)$$

ونلاحظ أن

$$d_3(v_1,v_{2s+2})=3 \qquad .....(6.18)$$

وأخيرا لبقية الرؤوس نلاحظ أنه لكل $2\le i\le 2s+1$ ، فان

$$d_3(v_1,v_i)=d_3(v_1,v_{t-i+2}) \qquad .....(6.19)$$

والتي تعطينا $d_3(v_1,v_i)$ لكل $2s+3\le i\le 4s+2$.

ولهذا تضرب العلاقة (6.17) بالعدد 2 وبعد جمعها مع x^3 التي تنتج من (6.18) نحصل على

$$W_3(v_1,R_t;x)=x^3+2\sum_{i=2}^{s+1}x^{2s-i+3}+2\sum_{i=s+2}^{2s+1}x^{i-1} \qquad .....(6.20)$$

وأخيرا، بالاستناد إلى (6.7) وتبسيط المقدار نحصل على (6.14) وبهذا يتم البرهان.

عبارة6.7: إذا كانت $t=4s$ ، $s\ge 2$ ، فان

$$W_3(R_t;x)=2s\,x^3+t\,x^2\sum_{i=2}^{s+1}x^{2s-i}+t\sum_{i=s+2}^{2s}x^{i-1} \qquad .....(6.21)$$

البرهان:

إذا كانت $2\le i\le 2s$ فان الحاوية $C(v_1,v_i)$ ذات أصغر طول تتكون من الدروب الثلاثة آلاتية:

$$P_1 : v_1,v_2,v_3,\ \dots\ ,v_i$$

$$P_2 : v_1,v_{2s+1},v_{2s},v_{2s-1},\ \dots\ ,v_{i+1},v_i$$

$$P_3 : v_1,v_{4s},v_{4s-1},v_{4s-2},\ \dots\ ,v_{i+2s+2},v_{i+2s+1},v_{i+2s},v_i$$

من الواضح أن:

$$\ell(P_1)=i-1\,,\ \ell(P_2)=\ell(P_3)=2s-i+2$$

ولما كان $i-1<2s-i+2$ عندما $2\le i\le s+1$ ، فان

$$d_3(v_1,v_i)=2s-i+2 \qquad .....(6.22)$$

ولما كان $2s-i+2<i-1$ عندما $i=s+2,s+3,s+4,\ \dots\ ,2s$ ، فان

$$d_3(v_1,v_i)=i-1\ ,\quad s+2\le i\le 2s \qquad .....(6.23)$$

ومن (6.22) و (6.23) نحصل على متعددة حدود وينر للمسافة العرضية−3 للرأس v_1 نسبة إلى الرؤوس $\{v_i : 2\le i\le 2s\}$ ، وهي:

$$\sum_{i=2}^{2s}x^{d_3(v_1,v_i)}=\sum_{i=2}^{s+1}x^{2s-i+2}+\sum_{i=s+2}^{2s}x^{i-1} \qquad .....(6.24)$$

من الواضح من الشكل 6.2 أن

$$d_3(v_1,v_{2s+1})=3 \qquad .....(6.25)$$

وأخيرا نلاحظ أن لكل $2\le i\le 2s$

$$d_3(v_1,v_i)=d_3(v_1,v_{t-i+2})$$

وتكون

وهذه تعطينا المسافة العرضية–3 للرأس v_1 نسبة إلى الرؤوس $v_{2s+2}, v_{2s+3}, \ldots, v_{4s}$ متعددة الحدود لها مطابقة إلى (6.24) وهكذا من (6.24) و (6.25) نجد أن

$$W_3(v_1, R_t; x) = 2\sum_{i=2}^{s+1} x^{2s-i+2} + 2\sum_{i=s+2}^{2s} x^{i-1} + x^3 \qquad .....(6.26)$$

وباستخدام (6.7) نحصل على (6.21) وبهذا يتم البرهان.

ولأجل تسهيل الرجوع إلى متعددة حدود وينر للمسافة العرضية–3 لبيان واكنر نجمع العبارتين6.6 و6.7 في المبرهنة الآتية:

مبرهنة6.8: متعددة حدود وينر للمسافة العرضية–3 للبيان R_t هي:

$$W_3(R_t; x) = \begin{cases} 2s\,x^3 + t\,x^2 \sum_{i=2}^{s+1} x^{2s-i} + t \sum_{i=s+2}^{2s} x^{i-1} & , \text{ when } t = 4s, s \geq 2 \\ (2s+1)x^3 + t\,x^3 \sum_{i=2}^{s+1} x^{2s-i} + t \sum_{i=s+2}^{2s+1} x^{i-1} & , \text{when } t = 4s+2, s \geq 1 \end{cases}$$

نتيجة 6.9 :

بتدقيق النظر في أعلى قوة لـ x في $W_2(R_t; x)$ و $W_3(R_t; x)$ نجد القطر للمسافة العرضية–2 و–3 للبيان R_t هو:

$$\text{diam}_2 R_t = 1 + \left\lceil \frac{t}{4} \right\rceil \qquad .....(6.24)$$

$$\text{diam}_3 R_t = \frac{1}{2} t$$

نتيجة6.10 : دليل وينر للمسافة العرضية–3 لبيان واكنر R_t هو:

$$W_3(R_t) = \begin{cases} s(3ts - t + 6) & , \quad \text{when } t = 4s \\ s(3ts + 2t + 6) + 3, & \text{when } t = 4s + 2 \end{cases}$$

المصادر

[1] A. S. Aziz (2007) “The Width Distance and the w-Wiener polynomials of a graph”, M. Sc. Thesis , Mosul University , Mosul.

[2] F. Buckley and F. Harary (1990) **Distance in Graphs** , Addison-Wesley , Redwood.

[3] G. Chartrand and L. Lesniak (1986) **Graphs and Digraphs**, Wadsworth Inc. Belmont, California.

[4] R. Diestel (2000) **Graph Theory** , Springer-Verlag ,New York.

[5] A. A. Dobrynin (1993) “On Decomposition of the Wiener Index for Graphs of Catacondensed Hexagonal System” , **Graph Theory Notes of New York**, XXV , The New York Academy of Sciences , PP.19-22.

[6] I. Gutman (1993) “Some Properties of the Wiener Polynomial”, **Graph Theory Notes of New York**, XXV, The New York Academy of Sciences , PP.13-18.

[7] H. Hosoya (1988) “On Some Counting Polynomials in Chemistry”, **Discrete Applied Math.**, 19 , PP.239-257.

[8] B. E. Sagan; Y-N. Yeh and P. Zhang (1996) “The Wiener Polynomial of a Graph” , **Intern. J. of Quantum Chemistry**, Vol. 60, PP. 959-969.