

## Stability Analysis of Steady State Solutions of Sine–Gordon Equation

Saad Abdullah Manna

Norjan Hasan Juma

College of Computer Science and Mathematics

University of Mosul, Iraq

Received on: 26/01/2006

Accepted on: 02/04/2006

### ABSTRACT

The stability analysis of steady state solutions of Sine–Gordon equation using Fourier mode stability analysis in two cases has been considered : Firstly when the amplitude is constant and secondly when the amplitude is variable in the two cases the results were found to be : The steady state solutions  $u_1 = \bar{\pi}, \bar{3\pi}, \bar{5\pi}, \dots$  and  $u_1 = u_1(X)$ ,  $-1 \leq X \leq 1$  are unconditionally stable . In the second case the comparison between the analytical solution and the numerical solution of Galerkin technique has been done . This comparison showed that the analytical solution and the numerical solution of Galerkin technique are the same.

**Keywords:** stability analysis, Sine–Gordon equation, Fourier mode, Galerkin technique.

### تحليل الإستقرارية للحلول اللازمونية لمعادلة Sine-Gordon

نورجان حسن جمعة

سعد عبد الله مناع

كلية علوم الحاسبات والرياضيات، جامعة الموصل

تاريخ قبول البحث: 2006/04/02

تاريخ استلام البحث: 2006/01/26

### المخلص

لقد تمت دراسة استقرارية الحلول اللازمونية لمعادلة Sine–Gordon باستخدام طريقة تحليل الإستقرارية من النمط Fourier في حالتين : الأولى في حالة كون السعة ثابتة، والثانية في حالة كون السعة متغيرة إذ تم استخدام طريقة Galerkin العددية مع الحل التحليلي في هذه الحالة . وقد تبين في كلتا الحالتين أن الحلين اللازميين  $u_1 = \bar{\pi}, \bar{3\pi}, \bar{5\pi}, \dots$  و  $u_1 = u_1(X)$ ,  $-1 \leq X \leq 1$  مستقران بصورة مشروطة كما تمت في الحالة الثانية مقارنة النتائج التحليلية لدراسة الإستقرارية بالحل العددي لطريقة Galerkin ، وقد تم الحصول على النتائج نفسها .

الكلمات المفتاحية: تحليل الإستقرارية، معادلة Sine–Gordon، طريقة Galerkin.

### 1. المقدمة Introduction

يعد مفهوم الإستقرارية من المفاهيم المهمة جداً في الرياضيات والعلوم التطبيقية ومن الأمثلة الشائعة على هذا المفهوم هو مسألة دراسة حركة نمو السكان (Dynamics of

Population Growth) فإذا كان حجم المجتمع السكاني في زمن معين يزداد بمعدل يتناسب مع عدد الأفراد في ذلك المجتمع، إذ أن حجم السكان لا يمكن أن يزداد بصورة آسية لكل الوقت وفي النهاية فان التنافس على الغذاء والموارد الطبيعية والمكان فضلا عن عوامل أخرى سوف يحدد النمو في حجم السكان، إن من المميزات المهمة لمفهوم الإستقرارية هو انه يمكننا من دراسة خواص الحل دون الحاجة إلى حل النظام أو معرفة الحل إذ أن الكثير من المسائل ليس لها حل مضبوط وكذلك فإن دراسة تحليل الإستقرارية يدرس السلوك طويل الأمد (Long Time Behavior) للحل في أية منظومة يمكن أن تتعرض إلى تأثيرات خارجية (إزعاجات) (Disturbances) وفي هذه الحالة من الممكن أن لا تعود المنظومة إلى حالتها الاعتيادية فيكون النظام غير مستقر، أو تعود إلى حالتها الاعتيادية فيكون النظام مستقرا [10]، وضع معادلة Sine-Gordon العالمان Frenkel and Kontorova في عام (1939) في فيزياء الحالة الصلبة، والتي تستخدم لنمذجة التشققات في البلورة. قدم Mclaughlin and Scott في عام (1978) [13] طريقة ذات مرحلتين لدراسة الازعاجات التركيبية للمعادلة Sine-Gordon، إذ قاما بحساب التعديلات البطيئة في السرعة والمواقع لمركبات الموجة المنفردة وحساب الإشعاع الناتج من تعجيل الموجات المنفردة من خلال دالة Green المشعة. استخدم Wei عام (2000) [17] خوارزمية الالتفاف المتقطع لحل معادلة Sine-Gordon إذ وجد أن القيم الابتدائية عندما تكون قريبة من قيم معينة من الممكن أن تسبب بعض المشاكل العددية مثل الفوضى الزمانية والمكانية المحتثة عددياً إذ توصل إلى أن هذه الخوارزمية جيدة الأداء فيما يخص الدقة والكفاية والبساطة والاستقرارية. قدم كل من Davidson and Mottram في عام (2002) [5] نموذجاً لدراسة تحول المسار في جهاز مكون من بلورات السائل النيماتيكى ثنائي الإستقرارية. اشتق كل من Mandula and Bugaychuk في عام (2003) [12] معادلة Sine-Gordon لوصف الزيغ الذاتي الموجي (Wave Self-Diffraction) وتفاعلات المادة الموجية اللاخطية وانتشار الموجات المنفردة. إذ حصلنا على الحل اللازمي، إذ قاما بدراسة نظرية لتوضيح إمكانية السيطرة على عرض والموقع الأقصى للموجة المنفردة في الحالة اللازمية. أعطى كل من D'Anna , Angelis and Fiore في عام (2005) [4] البراهين على وجود حلول الموجة المنقلة (المنفردة) لمعادلة Sine-Gordon المشوشة على خط مستقيم أو دائرة وقد قاموا كذلك بتصنيف هذه الحلول إذ بينوا التشويش (Perturbation) للمعادلة يتكون من حد قسري وحد مشتت خطياً. في هذا البحث ستنتم دراسة استقرارية الحلول اللازمية لمعادلة Sine-Gordon باستخدام طريقة تحليل الإستقرارية من

النمط Fourier في حالتين: الأولى في حالة كون السعة ثابتة، والثانية في حالة كون السعة متغيرة مع استخدام طريقة Galerkin العددية في هذه الحالة ومن ثم مقارنتها مع الحل التحليلي للسعة.

## 2. النموذج الرياضي The Mathematical Model

إن من معادلات الموجة اللاخطية الأكثر شيوعاً وشهرة هي معادلة Klein – Gordon [9]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - d^2 \Delta u + f(u) = 0 \quad (1)$$

إذ هي واحدة من أهم التوسيعات اللاخطية لمعادلة الموجة التي تصف الاهتزاز، إذ أن  $\gamma$  هي سرعة الموجة وان كثافة قوة المرونة (Elastic Force Density) توصف بوساطة الدالة  $f(u)$  إذ عندما تكون  $f(u) = \gamma u$  فإن المعادلة (1) سوف تتحول إلى معادلة Klein–Gordon الخطية إذ هي النموذج الأكثر بساطة للمعادلات التي تصف الموجات الخطية المبددة طبيعياً (Normally Dispersive Linear Waves) والاهتزازات لوتر يقع على قاعدة مرنة خطية فضلاً عن عمليات أخرى :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - d^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma u = 0$$

إذا كانت  $\gamma = 0$  فإن معادلة Klein – Gordon سوف تتحول إلى معادلة الموجة التقليدية ، وعندما تكون  $f(u) = \sin u$  فإن المعادلة (1) سوف تتحول إلى معادلة Sine–Gordon [9] .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - d^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin u \quad (2)$$

أو [6] :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin u \quad (3)$$

مع الشروط الابتدائية والشروط الحدودية

$$u(x, 0) = \pi + \varepsilon_o \cos(\mu x) , \quad u_t(x, 0) = 0$$

$$\mu = 2\pi / L , \quad L = 2\sqrt{2}\pi , \quad 0 \leq \varepsilon_o \leq 1000 , \quad -L \leq x \leq L$$

$$u(-L, t) = u(L, t) = b$$

حيث أن  $b$  ثابت ، وضع المعادلة (1) العالمان Klein and Gordon في العشرينات كنموذج لمعادلة الموجة التي تسمى Klein–Gordon اللاخطية، إن أول من أطلق اسم Sine–Gordon على المعادلة (3) العالم Kruskal، إذ أن  $u(x, t)$  تمثل إزاحة الذرات باتجاه المحور  $x$  وان دالة الـ sine تمثل دورة الشبكة البلورية. ان المعادلة (3) جذبت اهتمام علماء الرياضيات والفيزياء بسبب انتشارها الواسع كنموذج للظواهر الفيزيائية اللاخطية وحركة محفزات الـ DNA

[14]. ونتاجت المعادلة (3) خلال فترة الستينيات في مدى واسع من المسائل التي تتضمن البصرييات اللاخطية [15]. إن من أهم تطبيقات المعادلة (3) هي دراسة تأثيرات السلسلة الوراثية في انتشار الإثارات اللاخطية في النماذج البسيطة لسلسلة الـ DNA [3].

إن معادلة

(MKdV–Sine Gordon) Modified Korteweg de Vries-Sine Gordon Equation

تتحول إلى معادلة Sine–Gordon عندما تكون  $(A = 0, B = -1)$ :

$$u_{xt} + A \left( \frac{2}{3} u_x^2 u_{xx} + u_{xxx} \right) = B \sin u \quad (4)$$

إذ أن  $u_{xt} = u_{xx} - u_{tt}$  باستخدام طريقة تحويل المتغير المعتمد [8] التي تؤدي إلى:

$$u_{xx} - u_{tt} + A \left( \frac{2}{3} u_x^2 u_{xx} + u_{xxx} \right) = B \sin u \quad (5)$$

ان المعادلة (4) درسها Chen في عام (2000) [2]. لتحويل المعادلة (2) إلى الحالة اللابعدية في  $t, x$  فإننا نحتاج إلى التحويلات الآتية [16]:

$$X = \frac{x}{L}, \quad T = d \frac{t}{L}$$

وباستخدام هذه التحويلات نحصل على:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial T^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - N^2 \sin u \quad (6)$$

$$N^2 = L^2 / d^2 \quad \text{إذ أن}$$

$$u(-1, T) = u(1, T) = b, \quad -1 \leq X \leq 1$$

المعادلة (6) تمثل الصيغة اللابعدية لمعادلة Sine–Gordon.

### 3. تحليل الإستقرارية من النمط Fourier لمعادلة Sine–Gordon

#### 3.1. تحليل الإستقرارية في حالة السعة الثابتة

إن الفكرة الأساسية لهذه الطريقة هي افتراض الحل على الشكل الآتي [10]:

$$u(X, T) = u_1(X) + u_2(X, T) \quad (7)$$

إذ يمثل  $u_1(X)$  الحل اللازماني (الحل الذي لا يعتمد على الزمن  $t$ ) للمعادلة (6)، في حين يمثل  $u_2(X, T)$  الإزعاج الذي يعانیه النظام.

$$u_2(X, T) = A e^{k(ix+cT)} \quad (8)$$

$$A > 0 , k > 0 , c = c_1 + ic_2 , i = \sqrt{-1}$$

إذ أن A تمثل سعة الموجة، k تمثل العدد الموجي، c هي سرعة الموجة وهي ذات قيمة معقدة، إن القيمة الموجبة أو السالبة لـ  $c_1$  هي التي تحدد حالة الاستقرار أو عدم الاستقرار، ففي حالة  $c_1 > 0$  يزداد الإزعاج أو التشويش (Perturbation) بمرور الزمن، وإن الحل غير مستقر في هذه الحالة وعندما  $c_1 < 0$  فإن الإزعاج يتلاشى مع مرور الزمن وإن الحل مستقر في هذه الحالة. أما الحالة  $c_1 = 0$  فهي تعطي منحنى الإستقرارية المتعادلة (Neutral Stability Curve) وهو المنحنى الذي يفصل بين المنطقة المستقرة والمنطقة غير المستقرة، ويتعويض المعادلة (7) في المعادلة (6) نحصل على:

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial T^2} = \frac{d^2 u_1}{dX^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial X^2} - N^2 \sin(u_1 + u_2) \quad (9)$$

من المعادلة (9) نحصل على :

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial T^2} = \frac{d^2 u_1}{dX^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial X^2} - N^2 (\sin u_1 \cos u_2 + \cos u_1 \sin u_2) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial T^2} = \frac{d^2 u_1}{dX^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial X^2} - N^2 \sin u_1 - N^2 u_2 \cos u_1 \quad (10)$$

وبفصل الحالتين الزمنية واللازمية نحصل على :

$$\frac{d^2 u_1}{dX^2} - N^2 \sin u_1 = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial T^2} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial X^2} - N^2 u_2 \cos u_1 \quad (12)$$

إن الحل اللازمي للمعادلة (11) هو حل معقد، يكون على شكل عائلة من الحلول التي تكون على شكل (Jacobi Elliptic Function) وإن هذه العائلة من الحلول التي تكون بالشكل الآتي [15] :

$$\sqrt{\beta^2 - w^2} \int_{\tilde{u}}^{\tilde{u}} \frac{dy}{\sqrt{2(M - \cos y)}} = \theta , M > 0 , |v| < 1$$

إذ أن  $\theta$  هي متغير الموجة المنتقلة والذي يكون على الشكل الآتي:  $\theta = wt - \beta x$  ,  $v = w/\beta$  سرعة الموجة و  $M$  يمثل ثابت التكامل الأول و  $\tilde{u}$  تمثل دالة متزايدة رتيبة لـ  $\theta$ . إن التكامل المذكور انفا هو من النوع Elliptic Integral، وان الـ (Jacobi Elliptic Function) تمثل معكوس هذا التكامل. ولصعوبة هذا الحل وتعقيده فإننا نلجأ إلى (Linearized Stability Analysis) [7] إذ من المعادلة (11) نحصل على المعادلة الآتية :

$$\frac{d^2 u_1}{dX^2} - N^2 u_1 = 0 \quad (13)$$

$$u_1(-1) = u_1(1) = b \quad , \quad -1 \leq X \leq 1$$

إن المعادلة (12) تمثل الحالة الزمنية في حين تمثل المعادلة (11) الحالة اللازمية، إن المعادلة (13) هي معادلة تفاضلية اعتيادية خطية متجانسة، وان الحل العام لهذه المعادلة هو :

$$u_1(X) = B \cosh NX + C \sinh NX \quad (14)$$

إذ أن  $C, B$  ثوابت اختيارية، وبتعويض الشروط الحدودية في المعادلة (14) نحصل على :

$$B \cosh N - C \sinh N = b$$

$$B \cosh N + C \sinh N = b$$

وبالتعويض عن  $C, B$  في الحل العام نحصل على :

$$u_1(X) = (b / \cosh N) \cosh NX \quad (15)$$

إن المعادلة (15) تمثل الحل اللازمي لمعادلة Sine-Gordon، وبتعويض المعادلة (8) في المعادلة (12) نحصل على :

$$k^2 c^2 A e^{k(ix+cT)} = -k^2 A e^{k(ix+cT)} - N^2 \cos u_1 A e^{k(ix+cT)} \Rightarrow$$

$$c^2 = \frac{-(k^2 + N^2 \cos u_1)}{k^2} \Rightarrow$$

$$(c_1 + ic_2)^2 = \frac{-(k^2 + N^2 \cos u_1)}{k^2} \Rightarrow$$

$$c_1 + ic_2 = \bar{\mp} \sqrt{\frac{-(k^2 + N^2 \cos u_1)}{k^2}}$$

وبمساواة الجزئين الحقيقي والخيالي نحصل على :

$$c_1 = \mp \sqrt{\frac{-(k^2 + N^2 \cos u_1)}{k^2}} \quad (16)$$

$$c_2 = 0$$

-1 إذا كان :

$$c_1 = \sqrt{\frac{-(k^2 + N^2 \cos u_1)}{k^2}} \quad (17)$$

إذا كان  $\cos u_1 < 0$  ,  $N^2 \cos u_1 \leq -k^2$  ,  $f(u_1) > 0$  فان :

$$c_1 = \sqrt{\frac{-(k^2 - N^2 f(u_1))}{k^2}} \quad (18)$$

إذ أن  $k^2 \leq N^2 f(u_1)$  وفي هذه الحالة توجد لدينا الحالتان الآتيتان :

(a) إذا كان  $k^2 < N^2 f(u_1)$  فان  $c_1 > 0$  وان الحل غير مستقر في هذه الحالة .

(b) إذا كان  $k^2 = N^2 f(u_1)$  فان  $c_1 = 0$  والتي تمثل منحنى الإستقرارية المتعادلة .

$$k = \sqrt{N^2 f(u_1)} \quad (19)$$

والآن سوف يتم تطبيق النتائج في أعلاه على الحالتين الآتيتين :

(a) عندما  $u_1 = \bar{\pi}, \bar{3\pi}, \bar{5\pi}, \dots$  ، وبالتعويض عن هذه القيم في المعادلة (17) نحصل على :

$$c_1 = \sqrt{\frac{-(k^2 - N^2)}{k^2}}$$

إذ أن  $k^2 \leq N^2$

(i) إذا كان  $k^2 < N^2$  فان  $c_1 > 0$  وان الحل غير مستقر في هذه الحالة .

(ii) إذا كان  $k^2 = N^2$  فان  $c_1 = 0$  التي تعطي منحنى الإستقرارية المتعادلة .

$$k = N \quad (20)$$

(b) عندما  $u_1 = u_1(X)$  كما في المعادلة (15) نحصل على :

$$c_1 = \sqrt{\frac{-(k^2 + N^2 \cos(u_1(X)))}{k^2}} \quad (21)$$

إذ أن  $\cos(u_1(X)) < 0$  ,  $N^2 \cos u_1(X) \leq -k^2$

نفرض أن  $f(u_1(X)) > 0$  ,  $\cos(u_1(X)) = -f(u_1(X))$  فان :

$$c_1 = \sqrt{\frac{-(k^2 - N^2 f(u_1(X)))}{k^2}} \quad (22)$$

إذ أن  $k^2 \leq N^2 f(u_1(X))$  وفي هذه الحالة توجد لدينا الحالتان الآتيتان :

(i) إذا كان  $k^2 < N^2 f(u_1(X))$  فان  $c_1 > 0$  وان الحل غير مستقر في هذه الحالة .

(ii) إذا كان  $k^2 = N^2 f(u_1(X))$  فان  $c_1 = 0$  التي تمثل منحنى الإستقرارية المتعادلة .

$$k = \sqrt{N^2 f(u_1(X))} \quad (23)$$

-2- إذا كان :

$$c_1 = -\sqrt{\frac{-(k^2 + N^2 \cos u_1)}{k^2}} \quad (24)$$

إذ إن  $N^2 \cos u_1 \leq -k^2$  ,  $\cos u_1 < 0$  , نفرض أن  $\cos u_1 = -f(u_1)$  ,  $f(u_1) > 0$  فان :

$$c_1 = -\sqrt{\frac{-(k^2 - N^2 f(u_1))}{k^2}} \quad (25)$$

إذ إن  $k^2 \leq N^2 f(u_1)$  وفي هذه الحالة توجد لدينا الحالتان الآتيتان :

(a) إذا كان  $k^2 < N^2 f(u_1)$  فان  $c_1 < 0$  وان الحل مستقر في هذه الحالة .

(b) إذا كان  $k^2 = N^2 f(u_1)$  فان  $c_1 = 0$  والتي تمثل منحنى الاستقرارية المتعادلة .

$$k = \sqrt{N^2 f(u_1)} \quad (26)$$

والآن سوف يتم تطبيق النتائج في أعلاه على الحالتين الآتيتين :

(a) عندما  $u_1 = \bar{\pi}, \bar{3}\pi, \bar{5}\pi, \dots$  ، وبالتعويض عن هذه القيم في المعادلة (24) نحصل

على :

$$c_1 = -\sqrt{\frac{-(k^2 - N^2)}{k^2}}$$

إذ أن  $k^2 \leq N^2$

(i) إذا كان  $k^2 < N^2$  فان  $c_1 < 0$  وان الحل مستقر في هذه الحالة .

(ii) إذا كان  $k^2 = N^2$  فان  $c_1 = 0$  التي تعطي منحنى الإستقرارية المتعادلة .

$$k = N \quad (27)$$

(b) عندما  $u_1 = u_1(X)$  كما في المعادلة (15) نحصل على :

$$c_1 = -\sqrt{\frac{-(k^2 + N^2 \cos(u_1(X)))}{k^2}} \quad (28)$$

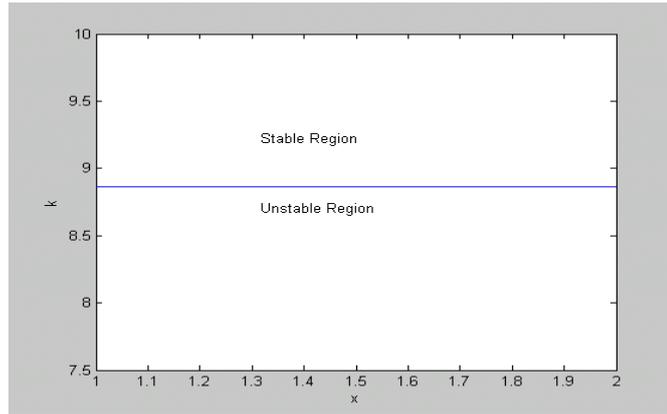
إذ أن  $\cos u_1(X) < 0, N^2 \cos u_1(X) \leq -k^2$  نفرض أن  $f(u_1(X)) > 0, \cos u_1(X) = -f(u_1(X))$  فان :

$$c_1 = -\sqrt{\frac{-(k^2 - N^2 f(u_1(X)))}{k^2}} \quad (29)$$

إذ أن  $k^2 \leq N^2 f(u_1(X))$  وفي هذه الحالة توجد لدينا حالتان الآتيتان :

- (i) إذا كان  $k^2 < N^2 f(u_1(X))$  فان  $c_1 < 0$  وان الحل مستقر في هذه الحالة .  
(ii) إذا كان  $k^2 = N^2 f(u_1(X))$  فان  $c_1 = 0$  التي تمثل منحنى الإستقرارية المتعادلة والموضح في الشكل (1).

$$k = \sqrt{N^2 f(u_1(X))} \quad (30)$$



الشكل (1)

يوضح الشكل منحنى الإستقرارية المتعادلة المتمثلة بالمعادلة (32) للحل اللازمي  $u_1 = u_1(X)$  المتمثل بالمعادلة (15) عندما  $-1 \leq X \leq 1$  و  $N^2=1, b=3.2416, L=2\sqrt{2}\pi$

### 3.2 تحليل الإستقرارية في حالة السعة المتغيرة

سوف تتم في هذا الجزء دراسة الإستقرارية تحليلياً ثم باستخدام طريقة Galerkin العددية.

#### 3.2.1 تحليل الإستقرارية باستخدام الحل التحليلي

في حالة كون السعة A متغيرة فان المعادلة (8) تتحول إلى [10] :

$$u_2(X, T) = A(X)e^{k(iX+cT)} \quad (31)$$

وبالتعويض عن المعادلة (31) في المعادلة (12) نحصل على :

$$\begin{aligned} c^2 k^2 A(X) e^{k(iX+cT)} &= -k^2 A(X) e^{k(iX+cT)} + 2ikA'(X) e^{k(iX+cT)} + A''(X) e^{k(iX+cT)} \\ -N^2 \cos u_1 A(X) e^{k(iX+cT)} &\Rightarrow \\ (c_1 + ic_2)^2 k^2 A(X) &= (-k^2 - N^2 \cos u_1) A(X) + 2ikA'(X) + A''(X) \end{aligned}$$

وبإهمال الجزء الخيالي نحصل على :

$$\begin{aligned} c_1^2 k^2 A(X) &= A''(X) + (-k^2 - N^2 \cos u_1) A(X) \Rightarrow \\ A''(X) + (-k^2 - N^2 \cos u_1 - c_1^2 k^2) A(X) &= 0 \end{aligned}$$

يمكن إعادة كتابة المعادلة في أعلاه على الشكل الآتي :

$$A''(X) + DA(X) = 0 \quad (32)$$

$$A(-1) = A(1) = b, -1 \leq X \leq 1$$

إذ  $D = -k^2 - N^2 \cos u_1 - c_1^2 k^2$  إن للمعادلة (32) الحالات الثلاث الآتية [10] :

(i) إذا كان  $D < 0$  فإن الحل العام للمعادلة (32) هو :

$$A(X) = B \cosh \sqrt{-D}X + C \sinh \sqrt{-D}X$$

إذ أن  $B, C$  هي ثوابت اختيارية، ولا تعني الإشارة السالبة هنا إن المقدار  $(-D)$  سالب بل هي للملاءمة فقط وباستخدام الشروط الحدودية نحصل على :

$$B \cosh \sqrt{-D} - C \sinh \sqrt{-D} = b$$

$$B \cosh \sqrt{-D} + C \sinh \sqrt{-D} = b$$

وبحل النظام الجبري في أعلاه نحصل على :

$$A(X) = (b / \cosh \sqrt{-D}) \cos \sqrt{-D}X$$

(ii) إذا كان  $D = 0$  فإن الحل العام للمعادلة (32) هو :

$$A(X) = BX + C$$

وباستخدام الشروط الحدودية نحصل على :

$$C - B = b$$

$$C + B = b$$

وبحل النظام الجبري في أعلاه نحصل على :

$$A(X) = b$$

أي أن السعة  $A$  في هذه الحالة هي كمية ثابتة وقد تم التطرق إلى هذه الحالة في الفقرة (3.1) .

(iii) إذا كان  $D > 0$  فإن الحل العام للمعادلة (32) هو :

$$A(X) = B \cos \sqrt{D}X + C \sin \sqrt{D}X$$

وباستخدام الشروط الحدودية نحصل على :

$$B \cos \sqrt{D} - C \sin \sqrt{D} = b$$

$$B \cos \sqrt{D} + C \sin \sqrt{D} = b$$

وبطرح المعادلة الأولى من المعادلة الثانية في النظام الجبري في أعلاه نحصل على :

$$C \sin \sqrt{D} = 0$$

ولتحديد قيمة  $D$  نفرض أن  $C \neq 0$  في أعلاه وهذا يؤدي إلى أن :

$$\sin \sqrt{D} = 0 \Rightarrow \sqrt{D} = n\pi \Rightarrow$$

$$D = (n\pi)^2, \quad n = \bar{+}1, \bar{+}2, \bar{+}3, \dots \quad (33)$$

ومن الملاحظ انه عند التعويض عن  $n = 0$  في المعادلة (33) نحصل على  $D = 0$  التي تمثل

الحالة (ii) والتي تم التطرق إليها، وبالتعويض عن  $D$  في إحدى المعادلتين في أعلاه نحصل على :

$$B = b$$

وبالتعويض عن  $D, B$  في الحل العام نحصل على :

$$A(X) = b \cos(n\pi)X + C \sin(n\pi)X$$

من المعادلة (33) نحصل على :

$$D = -k^2 - N^2 \cos u_1 - c_1^2 k^2 = (n\pi)^2 \Rightarrow$$

$$c_1^2 = \frac{-(k^2 + (n\pi)^2 + N^2 \cos u_1)}{k^2} \Rightarrow$$

$$c_1 = \bar{+} \sqrt{\frac{-(k^2 + (n\pi)^2 + N^2 \cos u_1)}{k^2}} \quad (34)$$

توجد للمعادلة (34) الحالتان الآتيتان :

(1) إذا كان :

$$c_1 = \sqrt{\frac{-(k^2 + (n\pi)^2 + N^2 \cos u_1)}{k^2}} \quad (35)$$

إذ أن  $\cos u_1 < 0, N^2 \cos u_1 \leq -(k^2 + (n\pi)^2)$  نفرض أن  $\cos u_1 = -f(u_1)$  ,  $f(u_1) > 0$  ,

فان :

$$c_1 = \sqrt{\frac{-(k^2 + (n\pi)^2 - N^2 f(u_1))}{k^2}} \quad (36)$$

إذ أن  $k^2 + (n\pi)^2 \leq N^2 f(u_1)$  وفي هذه الحالة توجد لدينا الحالتان الآتيتان :

(a) إذا كان  $k^2 + (n\pi)^2 < N^2 f(u_1)$  فان  $c_1 > 0$  وان الحل غير مستقر في هذه الحالة .

(b) إذا كان  $k^2 + (n\pi)^2 = N^2 f(u_1)$  فإن  $c_1 = 0$  ، وللحصول على منحنى الإستقرارية المتعادلة ، نأخذ اقل قيمة ذاتية (Eigen Value) عندما  $n = 1$  .

$$k = \sqrt{N^2 f(u_1) - 9.869604401} \quad (37)$$

If  $N^2 f(u_1) > 9.869604401$

إذ أن القيمة الذاتية هي تلك القيمة التي تمتلك المسألة عندها حلاً غير تافه (Non Trivial Solution) ويسمى الحل الذي يقابلها بالدالة الذاتية (Eigen Function) .

والآن سوف يتم تطبيق النتائج في أعلاه على الحالتين الآتيتين :

(a) عندما  $u_1 = \bar{\pi}, \bar{3\pi}, \bar{5\pi}, \dots$  ، بالتعويض عن هذه القيم في المعادلة (35) نحصل على:

$$c_1 = \sqrt{\frac{-(k^2 + (n\pi)^2 - N^2)}{k^2}}$$

إذ أن  $k^2 + (n\pi)^2 \leq N^2$

(i) إذا كان  $k^2 + (n\pi)^2 < N^2$  فإن  $c_1 > 0$  وإن الحل غير مستقر في هذه الحالة .

(ii) إذا كان  $k^2 + (n\pi)^2 = N^2$  فإن  $c_1 = 0$  ، وللحصول على منحنى الإستقرارية المتعادلة ،

نأخذ اقل قيمة ذاتية عندما  $n = 1$  .

$$k = \sqrt{N^2 - 9.869604401} \quad (38)$$

If  $N^2 > 9.869604401$

(b) عندما  $u_1 = u_1(X)$  كما في المعادلة (15) نحصل على :

$$c_1 = \sqrt{\frac{-(k^2 + (n\pi)^2 + N^2 \cos(u_1(X)))}{k^2}} \quad (39)$$

إذ أن  $\cos(u_1(X)) < 0$  ،  $N^2 \cos u_1(X) \leq -(k^2 + (n\pi)^2)$

نفرض أن  $f(u_1(X)) > 0$  ،  $\cos(u_1(X)) = -f(u_1(X))$  فإن :

$$c_1 = \sqrt{\frac{-(k^2 + (n\pi)^2 - N^2 f(u_1(X)))}{k^2}} \quad (40)$$

إذ أن  $k^2 + (n\pi)^2 \leq N^2 f(u_1(X))$  وفي هذه الحالة توجد لدينا الحالتان الآتيتان :

(a) إذا كان  $k^2 + (n\pi)^2 < N^2 f(u_1(X))$  فإن  $c_1 > 0$  وإن الحل غير مستقر في هذه الحالة .

(b) إذا كان  $k^2 + (n\pi)^2 = N^2 f(u_1(X))$  فإن  $c_1 = 0$  ، وللحصول على منحنى الإستقرارية

المتعادلة ، نأخذ اقل قيمة ذاتية عندما  $n = 1$  .

$$k = \sqrt{N^2 f(u_1(X)) - 9.869604401} \quad (41)$$

$$\text{If } N^2 f(u_1(X)) > 9.869604401$$

(2) إذا كان :

$$c_1 = -\sqrt{\frac{-(k^2 + (n\pi)^2 + N^2 \cos u_1)}{k^2}} \quad (42)$$

إذ أن  $\cos u_1 < 0$  ،  $N^2 \cos u_1 \leq -(k^2 + (n\pi)^2)$  نفرض أن  $f(u_1) > 0$  ،  $\cos u_1 = -f(u_1)$  فان :

$$c_1 = -\sqrt{\frac{-(k^2 + (n\pi)^2 - N^2 f(u_1))}{k^2}} \quad (43)$$

إذ أن  $k^2 + (n\pi)^2 \leq N^2 f(u_1)$  وفي هذه الحالة توجد لدينا الحالتان الآتيتان :  
 (a) إذا كان  $k^2 + (n\pi)^2 < N^2 f(u_1)$  فان  $c_1 < 0$  وان الحل مستقر في هذه الحالة .  
 (b) إذا كان  $k^2 + (n\pi)^2 = N^2 f(u_1)$  فان  $c_1 = 0$  ، وللحصول على منحنى الإستقرارية المتعادلة ، نأخذ اقل قيمة ذاتية (Eigen Value) عندما  $n = 1$  .

$$k = \sqrt{N^2 f(u_1) - 9.869604401} \quad (44)$$

$$\text{If } N^2 f(u_1) > 9.869604401$$

والآن سوف يتم تطبيق النتائج في أعلاه على الحالتين الآتيتين :

(a) عندما  $u_1 = \bar{+}\pi, \bar{+}3\pi, \bar{+}5\pi, \dots$  ، بالتعويض عن هذه القيم في المعادلة (42) نحصل على :

$$c_1 = -\sqrt{\frac{-(k^2 + (n\pi)^2 - N^2)}{k^2}}$$

$$\text{إذ أن } k^2 + (n\pi)^2 \leq N^2$$

(i) إذا كان  $k^2 + (n\pi)^2 < N^2$  فان  $c_1 < 0$  وان الحل مستقر في هذه الحالة .  
 (ii) إذا كان  $k^2 + (n\pi)^2 = N^2$  فان  $c_1 = 0$  ، وللحصول على منحنى الإستقرارية المتعادلة ، نأخذ اقل قيمة ذاتية (Eigen Value) عندما  $n = 1$  .

$$k = \sqrt{N^2 - 9.869604401} \quad (45)$$

$$\text{If } N^2 > 9.869604401$$

(b) عندما  $u_1 = u_1(X)$  كما في المعادلة (15) نحصل على :

$$c_1 = -\sqrt{\frac{-(k^2 + (n\pi)^2 + N^2 \cos(u_1(X)))}{k^2}} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} & \text{إذ أن } \cos(u_1(X)) < 0, N^2 \cos(u_1(X)) \leq -(k^2 + (n\pi)^2) \\ & \text{نفرض أن } f(u_1(X)) > 0, \cos(u_1(X)) = -f(u_1(X)) \text{ فإن :} \\ c_1 &= -\sqrt{\frac{-(k^2 + (n\pi)^2 - N^2 f(u_1(X)))}{k^2}} \end{aligned} \quad (47)$$

إذ أن  $k^2 + (n\pi)^2 \leq N^2 f(u_1(X))$  وفي هذه الحالة توجد لدينا الحالتان الآتيتان :  
 (a) إذا كان  $k^2 + (n\pi)^2 < N^2 f(u_1(X))$  فإن  $c_1 < 0$  وان الحل مستقر في هذه الحالة .  
 (b) إذا كان  $k^2 + (n\pi)^2 = N^2 f(u_1(X))$  فإن  $c_1 = 0$  ، وللحصول على منحنى الإستقرارية المتعادلة ، نأخذ اقل قيمة ذاتية (Eigen Value) عندما  $n = 1$  .

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{N^2 f(u_1(X)) - 9.869604401} \\ \text{If } N^2 f(u_1(X)) &> 9.869604401 \end{aligned} \quad (48)$$

### 3.2.2 تحليل الإستقرارية باستخدام طريقة Galerkin العددية

إن هذه الطريقة هي من طرائق المتبقيات الموزونة ( The Weighted Residual Methods)، تعتمد هذه الطريقة على فرض حل معين للمسألة، وبما أن هذا الحل هو تقريب للحل المضبوط (Exact Solution)، فعند تعويضه في المعادلة المطلوب حلها بعد مساواتها بالصفر ينتج ما يعرف بالخطأ، وبعد ذلك يضرب الخطأ بدالة موزونة (Weighted Function) ثم يوجد التكامل المحدد بالشروط الحدودية لهذا المقدار وعند وضع هذا التكامل مساوياً للصفر ينتج ما يسمى بالمتبقي R (Residual) [1]  
 نفرض أن الحل للمعادلة (32) على الشكل الآتي :

$$A(X) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos \lambda_n X + C_n \sin \lambda_n X) \quad (49)$$

بأخذ أحد حدود الحل المتمثل بالمعادلة (49) نحصل على :

$$A(X) = B_n \cos \lambda_n X + C_n \sin \lambda_n X$$

وباستخدام الشروط الحدودية نحصل على :

$$\left. \begin{aligned} B_n \cos \lambda_n - C_n \sin \lambda_n &= b \\ B_n \cos \lambda_n + C_n \sin \lambda_n &= b \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

ويحل النظام الجبري (50) نحصل على:

$$\lambda_n = n\pi, \quad n = \bar{+}1, \bar{+}2, \bar{+}3, \dots \quad (51)$$

$$B_n = b \quad (52)$$

وبالتعويض عن المعادلتين (51) و(52) في المعادلة (49) ، نحصل على :

$$A(X) = \sum_{n=1}^{\infty} (b \cos(n\pi)X + C_n \sin(n\pi)X) \quad (53)$$

وبتعويض المعادلة (53) في المعادلة (32) نحصل على :

$$\sum_{n=1}^{\infty} D(b \cos(n\pi)X + C_n \sin(n\pi)X) - \sum_{n=1}^{\infty} \left( (n\pi)^2 b \cos(n\pi)X + (n\pi)^2 C_n \sin(n\pi)X \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^p \left[ D - (n\pi)^2 \right] (b \cos(n\pi)X + C_n \sin(n\pi)X) = R \quad (54)$$

إذ أن R هو المتبقي ، وباستخدام فرضية Galerkin نحصل على :

$$\int_{-1}^1 \left[ \sum_{n=1}^p \left[ D - (n\pi)^2 \right] (b \cos(n\pi)X + C_n \sin(n\pi)X) \right] \phi_m(X) dX = 0 \quad (55)$$

إذ  $\phi_m(X)$  هي دالة مثلثية (متعامدة) مناسبة ( Suitable Orthogonal Trigonometric Function ) .

$$\phi_m(X) = \cos \lambda_m X \quad , \quad \lambda_m = m\pi \quad , \quad m = \bar{+}1, \bar{+}2, \bar{+}3, \dots \quad (56)$$

إن أي عنصر في المصفوفة سيكون على الشكل الآتي [11] :

$$X(n, m) = \int_{-1}^1 \sum_{n=1}^p \sum_{m=1}^p \left[ D - (n\pi)^2 \right] (b \cos(n\pi)X + C_n \sin(n\pi)X) \cos(m\pi)X dX \quad (57)$$

وبالاستفادة من التكاملات التحليلية الآتية :

$$\int_{-1}^1 \cos(n\pi)X \cos(m\pi)X dX = \begin{cases} 1 & \text{if } n = m \\ 0 & \text{if } n \neq m \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 \sin(n\pi)X \cos(m\pi)X dX = 0 \quad \text{for any } n, m$$

لحساب قيمة  $c_1$  من المعادلة (57) نحصل على :

$$D - (n\pi)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$D = -k^2 - N^2 \cos u_1 - c_1^2 k^2 = (n\pi)^2 \Rightarrow$$

$$c_1^2 = \frac{-(k^2 + (n\pi)^2 + N^2 \cos u_1)}{k^2} \Rightarrow$$

$$c_1 = \bar{\mp} \sqrt{\frac{-(k^2 + (n\pi)^2 + N^2 \cos u_1)}{k^2}} \quad (58)$$

نلاحظ أن المعادلة (58) التي تم الحصول عليها باستخدام طريقة Galerkin العددية هي المعادلة (34) نفسها التي تم الحصول عليها باستخدام الحل التحليلي ، أي أن المعادلة (58) سوف تعطي النتائج نفسها التي تم الحصول عليها باستخدام المعادلة (34) في الحالات  $u_1 = u_1(X)$  ،  $u_1 = \bar{\mp}\pi, \bar{\mp}3\pi, \bar{\mp}5\pi, \dots$  ، وهذا يدل على كفاية طريقة Galerkin ودقتها.

#### 4. الاستنتاجات

تمت دراسة استقرارية الطول اللازم للمعادلة (2) في حالتين: الأولى في حالة كون السعة ثابتة والثانية في حالة كون السعة متغيرة وقد تم الحصول في حالة السعة الثابتة على النتائج الآتية :

-1 عندما :

$$c_1 = \sqrt{\frac{-(k^2 + N^2 \cos u_1)}{k^2}}$$

إذ أن  $\cos u_1 < 0$  ،  $N^2 \cos u_1 \leq -k^2$  وفي هذه الحالة توجد لدينا النتيجتان الآتيتان :

(a) الحل  $u_1 = \bar{\mp}\pi, \bar{\mp}3\pi, \bar{\mp}5\pi, \dots$  غير مستقر إذا كان  $k^2 < N^2$  .

(b) الحل  $u_1 = u_1(X)$  ، كما في المعادلة (15) غير مستقر إذا كان  $k^2 < N^2 f(u_1(X))$  .

-2 عندما

$$c_1 = -\sqrt{\frac{-(k^2 + N^2 \cos u_1)}{k^2}}$$

إذ أن  $\cos u_1 < 0$  ،  $N^2 \cos u_1 \leq -k^2$  وفي هذه الحالة توجد لدينا النتيجتان الآتيتان :

(a) الحل  $u_1 = \bar{\mp}\pi, \bar{\mp}3\pi, \bar{\mp}5\pi, \dots$  مستقر إذا كان  $k^2 < N^2$  وإن منحنى الإستقرارية المتعادلة في

هذه الحالة:

$$k = N$$

(b) الحل  $u_1 = u_1(X)$  ، كما المعادلة (15) مستقر إذا كان  $k^2 < N^2 f(u_1(X))$  وإن منحنى

الإستقرارية المتعادلة في هذه الحالة :

$$k = \sqrt{N^2 f(u_1(X))}$$

أما في حالة كون السعة متغيرة فقد تمت مقارنة النتائج التي تم الحصول عليها عن طريق الحل التحليلي بالنتائج العددية لطريقة Galerkin إذ تبين إن النتائج التي تم الحصول عليها من طريقة Galerkin هي نفسها التي تم الحصول عليها من الحل التحليلي وهذا يدل على كفاية هذه الطريقة ودقتها وقد تم الحصول على النتائج الآتية :

-1 عندما

$$c_1 = \sqrt{\frac{-(k^2 + (n\pi)^2 + N^2 \cos u_1)}{k^2}}$$

إذ أن  $N^2 \cos u_1 \leq -(k^2 + (n\pi)^2)$  ،  $\cos u_1 < 0$  وفي هذه الحالة توجد لدينا النتيجتان الآتيتان:

(a) الحل  $u_1 = \bar{\pi}, \bar{3\pi}, \bar{5\pi}, \dots$  غير مستقر إذا كان  $k^2 + (n\pi)^2 < N^2$  .

(b) الحل  $u_1 = u_1(X)$  ، كما في المعادلة (15) غير مستقر إذا كان  $k^2 + (n\pi)^2 < N^2 f(u_1(X))$  .

-2 عندما

$$c_1 = -\sqrt{\frac{-(k^2 + (n\pi)^2 + N^2 \cos u_1)}{k^2}}$$

إذ أن  $NL^2 \cos u_1 \leq -(k^2 + (n\pi)^2)$  ،  $\cos u_1 < 0$  وفي هذه الحالة توجد لدينا النتيجتان الآتيتان :

(a) الحل  $u_1 = \bar{\pi}, \bar{3\pi}, \bar{5\pi}, \dots$  مستقر إذا كان  $k^2 + (n\pi)^2 < N^2$  وان منحنى الإستقرارية المتعادلة في هذه الحالة :

$$k^2 = \sqrt{N^2 - 9.869604401} , \text{ If } N^2 > 9.869604401$$

(b) الحل  $u_1 = u_1(X)$  ، كما في المعادلة (15) مستقر إذا كان  $k^2 + (n\pi)^2 < N^2 f(u_1(X))$  وان منحنى الإستقرارية المتعادلة في هذه الحالة :

$$k = \sqrt{N^2 f(u_1(X)) - 9.869604401} , \text{ If } N^2 f(u_1(X)) > 9.869604401$$

المصادر

- [1] Allaire,P.E. (1985) **Basics of the Finite Element Method**, Wm.C.Brown Publishers.
- [2] Chen , D. ; Zhang , D. and Deng , S. (2002) “The Novel Multi–Soliton Solutions of the MKdV–Sine Gordon Equations” , J. Phys. Soc. Japan , Vol. 71 , No. 2 , PP.658 – 659.
- [3] Cuenda, S. and Sanchez, A. (2004) “Nonlinear Excitations in DNA : A Periodic Models versus Actual Genome Sequences”, **Phys. Rev. E70**, 051903.
- [4] D’Anna , A.; DeAngelis, M. and Fiore , G. (2005) “Towards Soliton Solution of a Perturbed Sine–Gordon Equation” , **arXiv :math-ph/0507005**.
- [5] Davidson , A. J. and Mottram , N. J. (2002) “ Flexoelectric Switching in a Bistable Nematic Device” , **Phys. Rev. E**, Vol. 65 , 051710.
- [6] Ercolani , N. , Forest , M.G. and Mclaughlin , D.W.(1990) “Geometry of the Modulation of Instability III , Homoclinic Orbits for the Periodic Sine–Gordon Equation”, **Physica D 43**, PP.349-384.
- [7] Garbey, M.; Kaper, H.G. and Romanyukha, N. (2001) **A Fast Solver for System of Reaction–Diffusion Equations**, Thirteenth International Conference on Domain Decomposition Methods , Editors : Debit , N. , Garbey , M. , Hoppe , R. , Periaux, J. , Knznetsov , Y., PP.385–392.
- [8] Hirota,R. (1977) “Nonlinear Partial Difference Equation III; Discrete Sine–Gordon Equation” , **J. Phys. Soc. Japan 43** , 2079.
- [9] Landa,P.S. (1996) **Nonlinear Oscillations and Waves in Dynamical Systems** , Kluwer Academic Publisher.
- [10] Logan, J. D. (1987) **Applied Mathematics** , John Wiley and Sons.
- [11] Manaa,S.,A.and Moheemmed,M.A. (2005) “Stability Analysis for Steady State Solutions of Huxley Equation”, Raf. J. of Comp. and Math’s.Vol.2,No.1, PP.69-84.
- [12] Mandula,G. ;Bugaychuk,S.; Kovacs,L.; Rupp,R.A. and Polgar,K. (2003) **Soliton Profile of the Dynamic Grating Amplitude and its Alteration in Photorefractive Wave–Mixing** , Ninth International Conference on Photorefractive Effects , Materials ,and Devices. PR03,Nice,France17–21 June.

- [13] McLaughlin , D. W. and Scott , A. C. (1978) “Perturbation Analysis of Fluxon Dynamics” , **Phys. Rev. A**, Vol.18 , No.4 , pp.1652–1680.
- [14] Quintero , N. R. and Sanchez , A. (1998) “dc Motion of ac Driven Sine– Gordon Solutions” , **Phys. Lett. A247** , PP.161–166.
- [15] Scott , A. C. (2003) **Nonlinear Science: Emergence and Dynamics of Coherent Structures** , Second Edition,Oxford: Oxford University Press.
- [16] Smith , G. D. (1985) **Numerical Solution of Partial Differential Equations : Finite Difference Methods** , Oxford University Press.
- [17] Wei , G. W. (2000) **Discrete Singular Convolution for the Sine–Gordon Equation** , J. Physica D 137 , PP. 247 – 259.