Numerical Stability Study of the Explicit-Implicit Range-Kuta Synthesis Methods (IMEX-ARK)

Thair Y. Thanoon **Younis Abd Hussain**
thairthanoon@uomosul.edu.iq
College of Computer Sciences and Mathematics
University of Mosul

Received on:9/11/2004 **Accepted on:5/4/2005**

ABSTRAC

In this research we studied the numerical stability for Implicit-Explicit Additive Runge-Kutta (IMEX-ARK) methods which have the A[α]-stability .This stability is equivalent A-stability of (B(α)-ARK) methods where B(α)=α B_1+(1-α)B_2 of second and third order for different intervals of values α .This methods are suitable for solving stiff non-linear differential equations which has the form :

$$y' = f(y) + \frac{1}{\in} g(y)\ ,\ \in > 0$$

which contains stiff and non-stiff terms. We have used Matlab as programming tool .

Keywords: Numerical stability, Runge-Kutta methods, stiff differential equation.

دراسة الاستقرارية العددية لطرائق رانج–كوتا التجميعية الصريحة–الضمنية (IMEX-ARK)

ثائر يونس ذنون **يونس عبد حسين**
كلية علوم الحاسبات والرياضيات، جامعة الموصل *كلية العلوم*، جامعة كويا

تاريخ استلام البحث:٩ /١١/٢٠٠٤ **تاريخ قبول البحث:٥/٤/٢٠٠٥**

الملخص

في هذا البحث تم دراسة الاستقرارية العددية لطرائق رانج –كوتا التجميعيةالصريحة– الضمنية (IMEX-ARK) ذوات الاستقرارية–$A[\alpha]$. وهذه الاستقرارية تكافئ الاستقرارية –A من الطرائق $(B(\alpha)-ARK)$ عندما $B(\alpha)=\alpha B_1+(1-\alpha)B_2$ ومن الرتبة الثانية والثالثة لفترات مختلفة من قيم α . وهذه الطرائق مناسبة لحل المعادلات التفاضلية الصلبة غير الخطية المعرفة بالصيغة الآتية :

$$y' = f(y) + \frac{1}{\in} g(y)\ ،\ \in > 0$$

التي تحتوي على حدود صلبة وغير صلبة وتم استخدام برنامج بنظام(Matlab)في حل هذه المسألة.

الكلمات المفتاحية: الاستقرارية العددية , طريقة رانج–كوتا, المعادلات التفاضلية الصلبة .

(1.1) المقدمة

ظهرت مسألة القيم الابتدائية الصلبة لاول مرة في دراسة حركة النابض المتغير الصلابة ومنها أخذت هذه المسألة تسمية الصلابة . وكان الظهور الأول لمصطلح "الصلابة " في البحث الذي أجراه كورتيس وهيرسفليد (1952) على مسألة ناتجة من تفاعل كيميائي وقد افترضا أول مجموعة من صيغ التكاملات العددية المناسبة لمسائل القيم الابتدائية الصلبة بدون إعطاء تعريف دقيق لهذه المسائل. إن الأنظمة التفاضلية الصلبة تظهر في العديد من التطبيقات المهمة مثل الكيمياء والهندسة وعلم الكيمياء الحركية وشبكة المعلومات ونظريات السيطرة، وأشياء علمية مهمة ومختلفة [10] . في الدراسات الحديثة ظهر اهتمام كبير من لدن العلماء بدراسة الطرائق التجميعية العددية ومنها طرائق رانج–كوتا الصريحة –الضمنية (IMEX-RK) المناسبة لحل المسائل الصلبة غير الخطية التي يمكن أن تتجزأ الى جزئين أو اكثر ويعبر عن الطرائق التجميعية بمسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f_1(t,y) + \cdots + f_N\ (t,y) \quad , \qquad y(0) = y_0 \qquad \ldots(1.1.1)$$

فمثلاً في المعادلة (1.1.1) إذا كانت N=2 فاننا نلاحظ إن f_1 هو عبارة عن جزء صلب بينما f_2 عبارة عن جزء غير صلب أي إن الطريقة التجميعية(Additive Scheme) بشكل عام هي عبارة عن عملية ربط التكامل الضمني للحد f_1 مع التكامل الصريح للحد $f^{[2]}$ [1] وتركز الاهتمام في هذا البحث بشكل خاص بالحالة التي يكون فيها كل جزء من f_v ، v=1,2,…,n جزءاً صلباً . والمسألة التي تمت دراستها هي نظام من المعادلات التفاضلية الاعتيادية الصلبة غير الخطية التي يعبر عنها بالشكل الآتي :

$$y' = f(y) + \frac{1}{\in} g(y) \qquad \ldots(1.1.2)$$

إذ

$$f, g : R^N \to R^N, y = y(t) \in R^N \quad ,$$

$0 < \in$, يمثل عامل الصلابة . حيث يلاحظ أن النظام (1.1.2) قد تم تجزئته الى حدين الحد f يمثل الجزء غير الصلب (non- stiff) بينما الحد g يمثل الجزء الصلب (stiff) ويتم تطبيق

التكامل الصريح على الحد غير الصلب بينما يتم تطبيق التكامل الضمني على الحد الآخر [6] . بحث العالمان (Cooper) و (Sayfy) [3] مسألة دراسة الاستقرارية - A للطرائق التجميعية (A, B_1, B_2) حيث ان الحل العددي لمسألة القيمة الابتدائية يعتمد على التركيب المختار لذا عرف الاستقرارية -A بالنسبة للتركيب $[(1-\alpha)f_1 + \alpha f_2]$ وتمت تسميتها الاستقرارية – [α A] لغرض إيجاد طرائق تجميعية ذوات استقرارية– [α A] لجميع قيم α التي تحقق المتباينة $0 \le \alpha \le k$ حيث k عدد اقل من الواحد وكلما اقتربت من الواحد زادت كفاءة الاستقرارية المطلقة . أما العالم (Araujo) [2] فقد درس الطرائق التجميعية ذوات الاستقرارية -B لحل مسائل القيم الابتدائية الصلبة غير الخطية و أعطى الشرط الضروري والكافي للطرائق التجميعية ذوات الاستقرارية -B. كذلك درس العالمان (Kennedy) و (Carpenter) [5] طرائق رانج– كوتا التجميعية الصريحة – الضمنية وأسموها ($IME X\text{-}ARK_2$) واستخدما هذه الطريقة لحل المعادلة الآتية: $\frac{dU}{dt} = F_{ns} + F_s$ حيث F_{ns} يمثل الحد غير الصلب بينما F_s يمثل الحد الصلب ، فاستخدما طريقة رانج – كوتا الصريحة (ERK) لحل جزء غير صلب بينما استخدما طريقة رانج– كوتا الضمنية القطرية المفردة الصريحة (ESDIRK) ذات الاستقرارية -L لحل الجزء الصلب . أما العالمان(Pareschi) و (Russo [9] فقد درسا طرائق رانج – كوتا الصريحة – الضمنية (IMEX-RK) فاستخدما هذه الطرائق لحل أنظمة من المعادلات التفاضلية الصلبة غير الخطية فالطريقة (IM) تطبق على الجزء الصلب بينما الطريقة (EX) تطبق على الجزء غير الصلب .

تعريف (1.2) [2]

طريقة رانج –كوتا التجميعية (ARK) المكونة من s من المراحل , N من المستويات هي طريقة عددية مكونة من خطوة واحدة مع الحل الابتدائي $y(t_n) = y_n$ والتي نحصل منها على التقريب y_{n+1} عند النقطة $y(t_{n+1})$ ومع حجم الخطوة h التي يتم تمثيلها بالعلاقة $t_{n+1} = t_n + h$ وتعرف بالصيغة الآتية

$$Y_{ni} = y_n + h\sum_{v=1}^{N} \sum_{j=1}^{s} a_{ij}^{[v]} f^{[v]}(t_n + c_i h, Y_{nj})$$

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{v=1}^{N}\sum_{i=1}^{s} b_i^{[v]} f^{[v]}(t_n + c_i h, Y_{ni})$$

تعريف (1.3) [7]

طريقة رانج كوتا الصريحة – الضمنية(IMEX-RK) تمتلك الصيغة الآتي

$$Y_i = y_0 + h\sum_{j=1}^{i-1} \tilde{a}_{ij} f\left(t_0 + \tilde{c}_j h, Y_j\right) + h\sum_{j=1}^{v} a_{ij} \frac{1}{\in} g\left(t_0 + c_j h, Y_j\right)$$

$$y_1 = y_0 + h\sum_{i=1}^{v} \tilde{w}_i f\left(t_0 + \tilde{c}_i h, Y_i\right) + h\sum_{i=1}^{v} w_i \frac{1}{\in} g\left(t_0 + c_i h, Y_i\right)$$

(1.4) شروط الرتبة Order Conditions [4]

1- الرتبة الاولى First order

$$c_i = \sum_j a_{ij} \quad , \quad \tilde{c}_i = \sum_j b_{ij} \qquad ...(1.4.1)$$

$$\sum_i b_i = 1 \quad , \quad \sum_i \tilde{b}_i = 1 \qquad ...(1.4.2)$$

2- الرتبة الثانية Second order

$$\sum_i b_i c_i = \frac{1}{2} \quad , \quad \sum_i \tilde{b}_i \tilde{c}_i = \frac{1}{2} \qquad ...(1.4.3)$$

$$\sum_i b_i \tilde{c}_i = \frac{1}{2} \quad , \quad \sum_i \tilde{b}_i c_i = \frac{1}{2} \qquad ...(1.4.4)$$

3- الرتبة الثالثة Third order

$$\sum_{ij} b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{6} \quad , \quad \sum_{ij} \tilde{b}_i b_{ij} \tilde{c}_j = \frac{1}{6} \qquad ...(1.4.5)$$

$$\sum_i b_i c_i c_i = \frac{1}{3} \quad , \quad \sum_i \tilde{b}_i \tilde{c}_i \tilde{c}_i = \frac{1}{3} \qquad ...(1.4.6)$$

4- الشروط المدمجة Mixed conditions

$$\sum_{ij} \tilde{b}_i a_{ij} \tilde{c}_j = \frac{1}{6} \quad , \quad \sum_{ij} \tilde{b}_i b_{ij} c_j = \frac{1}{6} \qquad ...(1.4.7)$$

$$\sum_{ij} b_i b_{ij} c_j = \frac{1}{6} \quad , \quad \sum_{ij} \tilde{b}_i a_{ij} c_j = \frac{1}{6} \qquad ...(1.4.8)$$

$$\sum_{ij} b_i b_{ij} \tilde{c}_j = \frac{1}{6} \quad , \quad \sum_{ij} b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{6} \qquad ...(1.4.9)$$

$$\sum_i \tilde{b}_i \tilde{c}_i c_i = \frac{1}{3} \quad , \quad \sum_i \tilde{b}_i c_i c_i = \frac{1}{3} \qquad ...(1.4.10)$$

$$\sum_i b_i\tilde{c}_i c_i = \frac{1}{3} \quad , \quad \sum_i b_i\tilde{c}_i\tilde{c}_i = \frac{1}{3} \qquad ...(1.4.11)$$

ملاحظة (1)

أ– الحل في حالة الرتبة الاولى يتحقق بصورة مباشرة لان النظام هو عبارة عن نظام مستقل

ب– اذا كان $b_i = \tilde{b}_i$ ، $c_i = \tilde{c}_i$ لكل $i = 1,\dots,s$ فان الشروط المدمجة تتحقق بصورة مباشرة ولكن هذا غير صحيح عندما تكون الرتبة أعلى من الثالثة [7] .

اشتقاق بعض طرائق رانج – كوتا التجميعية الصريحة – الضمنية (IMEX - ARK) ذوات الاستقرارية – A[α]

(1.5) المقدمة

إن كثيراً من المسائل في الحقول العلمية المختلفة ولاسيما في التطبيقات الهندسية والرياضية تقودنا إلى معادلات تفاضلية اعتيادية أو جزئية يكون حل عدد قليل منها يسيراً يمكن إيجاده باستخدام الطرائق المعروفة لحلول المعادلات التفاضلية ولكن هناك عدداً من المسائل لا يمكن التغلب عليها إلا باستعمال الحلول العددية [4]. وبما أن طرائق رانج–كوتا الصريحة تمتلك استقرارية محدودة لذلك لا تعطينا نتائج جيدة لاسيما مع الأنظمة الصلبة. ومن جهة أخرى الطرائق الضمنية تمتلك استقرارية افضل ومحدودة ولكن تتطلب حل أنظمة الجبرية في كل خطوة .لذلك فإن الطرائق الصريحة– الضمنية (IMEX) تحاول جمع الطريقتين سوية ومعالجة الحدود الصلبة باستخدام الطريقة الضمنية بينما تترك الحدود الباقية لمعالجتها باستخدام الطريقة الصريحة [9] . وهذه الطرائق تعمل على تجزئة المعادلات التفاضلية الاعتيادية والمكونة من طريقتين الصريحة والضمنية ، الضمنية تطبق على الأجزاء الخطية الصلبة ، بينما الصريحة تطبق على الأجزاء غير الخطية وغير الصلبة لذلك لا نحتاج في هذه الطرائق إلاّ إلى حل منظومة من المعادلات الخطية أو إيجاد معكوس المصفوفة في كل مرحلة لا يكون فيها $i=1,\dots,s,\ a_{ii=0}$ لذلك يفضل استخدام هذه الطرائق على طرائق رانج–كوتا من الرتب العليا. سنقوم في هذا الفصل باشتقاق طرائق رانج–كوتا التجميعية الصريحة – الضمنية (IMEX-ARK) ذوات الاستقرارية $-A[\alpha]$ لقيم α المحصورة بين $0 \le \alpha \le k$ ، $0 < k < 1$.

(1.6) الطريقة ذات الرتبة p=2 والمراحل s=2

وصيغتها العامة

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \tilde{c}_2 & b_{21} & 0 \\ \hline & \tilde{b}_1 & \tilde{b}_2 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} c_1 & a_{11} & a_{12} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array} \qquad \ldots(1.6.1)$$

حيث $B_2=[a_{ij}]$, $B_1=[b_{ij}]$

وبما ان

$$B(\alpha)=\alpha B_1+(1-\alpha)B_2$$

$$B(\alpha)=\begin{bmatrix} (1-\alpha)a_{11} & (1-\alpha)a_{12} \\ \alpha b_{21}+(1-\alpha)a_{21} & (1-\alpha)a_{22} \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \qquad \ldots(1.6.2)$$

ندرس الاستقرارية –[α] A لطريقة (IMEX-ARK) وهي تكافئ الاستقرارية– A للطريقة $(B(\alpha)-ARK)$فمن الصيغة (1.4.1) نحصل

$$q_2=p_2-p_1+\frac{1}{2} \qquad \ldots(1.6.3)$$

على الشرط الضروري والكافي لهذه الاستقرارية[3] وهو

$$p_2^2\geq q_2^2 \qquad \ldots(1.6.4)$$

وبتطبيق شروط الرتبة نحصل على الطريقة (IMEX-ARK) وبعد فرض ان $a_{11}=a_{22}=\gamma$ ، $c_2=k$ فان الطريقة $(B(\alpha)-ARK)$ تكون ذات استقرارية – A لكل α التي تحقق المتباينة .

$$0\leq\alpha\leq1-\frac{1}{4\gamma}\ ,\frac{1}{4}\leq\gamma \qquad \ldots(1.6.5)$$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ k & k & 0 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} 0 & \gamma & -\gamma \\ k & k-\gamma & \gamma \\ \hline \end{array} \qquad \ldots(1.6.6)$$

$$\begin{array}{c|cc} \hline & \frac{2k-1}{2k} & \frac{1}{2k} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|cc} \hline & \frac{2k-1}{2k} & \frac{1}{2k} \end{array}$$

فاذا فرضنا $\gamma=\frac{1}{4}$ ، $k=\frac{1}{2}$ نحصل على الطريقة (IMEX-ARK)

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|cc} 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \hline & 0 & 1 \end{array} \qquad \ldots(1.6.7)$$

ذات الاستقرارية –$A[\ \alpha\ ]$ للقيم $\alpha=0$

اذا فرضنا $\gamma=\frac{1}{2}$ ، $k=\frac{1}{2}$ فإننا نحصل على الطريقة (IMEX-ARK)

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|cc} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline & 0 & 1 \end{array} \qquad \ldots(1.6.8)$$

ذات الاستقرارية – $A[\alpha]$ للقيم α التي تحقق المتباينة $0\le\alpha\le\frac{1}{2}$

<u>(1.7) الطريقة ذات الرتبة p=3 والمراحل s=3</u>

ونكتب صيغتها العامة

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{c}_2 & b_{21} & 0 & 0 \\ \tilde{c}_3 & b_{31} & b_{32} & 0 \\ \hline & \tilde{b}_1 & \tilde{b}_2 & \tilde{b}_3 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & 0 \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & 0 \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \qquad \ldots(1.7.1)$$

$$B(\alpha)=\alpha B_1+(1-\alpha)B_2$$

$$B(\alpha)=\begin{bmatrix} a_{11}(1-\alpha) & a_{12}(1-\alpha) & 0 \\ \alpha b_{21}+a_{21}(1-\alpha) & a_{22}(1-\alpha) & 0 \\ \alpha b_{31}+a_{31}(1-\alpha) & \alpha b_{32}+a_{32}(1-\alpha) & a_{33}(1-\alpha) \end{bmatrix} \qquad \ldots(1.7.2)$$

وبتطبيق شروط الرتبة (3)−(1.4) وبفرض ان $b_3=n$ ، $c_3=h$ ، $a_{11}=a_{22}=a_{33}=\gamma$ فنحصل على

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{c}_2 & \tilde{c}_2 & 0 & 0 \\ h & h-b_{32} & b_{32} & 0 \\ \hline & 1-n-\tilde{b}_2 & \tilde{b}_2 & n \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} 0 & \gamma & -\gamma & 0 \\ c_2 & c_2-\gamma & \gamma & 0 \\ h & h-\gamma-a_{32} & a_{32} & \gamma \\ \hline & 1-n-b_2 & b_2 & n \end{array} \qquad \ldots(1.7.3)$$

اذ ان

$$c_2=\frac{2\left(1-3nh^2\right)}{3(1-2nh)} \qquad \ldots(1.7.4)$$

$$\tilde{c}_2=\frac{2\left(1-3nh^2\right)}{3(1-2nh)} \qquad \ldots(1.7.5)$$

$$b_2=\frac{3(1-2nh)^2}{4\left(1-3nh^2\right)} \qquad \ldots(1.7.6)$$

$$b_1=1-n-\frac{3(1-2nh)^2}{4\left(1-3nh^2\right)} \qquad \ldots(1.7.7)$$

$$a_{32}=\frac{(1-2nh)[1-3(\gamma+2n\gamma h)+6n\gamma h]}{4n\left(1-3nh^2\right)} \qquad \ldots(1.7.8)$$

$$b_{32}=\frac{1-2nh}{4n\left(1-3nh^2\right)} \qquad \ldots(1.7.9)$$

وهذا يؤدي إلى أن الطريقة الضمنية تكون ذات استقرارية – A [3] إذا

$$\left(p_2-\frac{1}{2}p_1+\frac{1}{6}\right)\left(2p_3-p_2+\frac{1}{2}p_1-\frac{1}{6}\right)\geq 0 \qquad \ldots(1.7.10)$$

$$q_4=0 \qquad \ldots(1.7.11)$$

وبما ان

$$3(1-\alpha)^2\gamma^2-(1-\alpha)\gamma-2(1-\alpha)^3\gamma^3+\frac{1}{12}\geq 0 \qquad \ldots(1.7.12)$$

$$3(1-\alpha)^2\gamma^2-\frac{3}{2}(1-\alpha)\gamma+\frac{1}{6}\Bigg)\left(2(1-\alpha)^3\gamma^3-3(1-\alpha)^2\gamma^2+\frac{3}{2}(1-\alpha)\gamma-\frac{1}{6}\right)\geq 0 \qquad \ldots(1.7.13)$$

وبحل المتباينتين عدديا نحصل على

$$\frac{1}{3} \le (1-\alpha)\gamma \le 1.06857902$$

أذاً الطريقة الضمنية تكون ذات استقرارية – A فإن

$\gamma \in \left[\frac{1}{3}, 1.06857902\right]$ عندما $\alpha = 0$ فقط .

نحصل على الطريقة (IMEX-ARK)

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & \frac{25}{100} & \frac{25}{100} & \frac{5}{10} \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} 0 & \gamma & -\gamma & 0 \\ c_2 & c_2-\gamma & \gamma & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{5-3\gamma}{12} & \frac{1-3\gamma}{4} & \gamma \\ \hline & \frac{25}{100} & \frac{25}{100} & \frac{5}{10} \end{array} \quad \ldots(1.7.14)$$

ذات استقرارية $-A[\alpha]$ عندما $\alpha = 0$ ، $\gamma = \frac{1}{3}$ ، $n = \frac{5}{10}$

ونحصل أيضاً على الطريقة (IMEX-ARK)

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & \frac{25}{100} & \frac{25}{100} & \frac{5}{10} \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} 0 & \gamma & -\gamma & 0 \\ c_2 & c_2-\gamma & \gamma & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{5-3\gamma}{12} & \frac{1-3\gamma}{4} & \gamma \\ \hline & \frac{25}{100} & \frac{25}{100} & \frac{5}{10} \end{array} \quad \ldots(1.7.15)$$

ذات الاستقرارية $-A[\alpha]$ عندما $\alpha = 0$ ، $\gamma = 1.06857902$ ، $n = \frac{5}{10}$

المسألة(1.8)[8]

حل المسالة الآتية بطرائق رانج–كوتا التجميعية الصريحة–الضمنية (IMEX -ARK)

ومن الرتبتين الثانية والثالثة وذوات الاستقرارية -A[α] ولقيم مختلفة من k, γ .

$$u' = -v; \quad u(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$v' = u + \frac{1}{\in}(e(u) - v) \quad v(0) = 1$$

اذ

$$e(u) = \sin(u), \quad 0 \le t \le 5$$

وباستعمال طول خطوة $h = 0.05$. فان معدل التقارب يحسب عادةً من خلال منحني الخطأ $E_{h/2}, E_h$

ملاحظة (2)

الطريقة- (p, σ, s)

حيث s يمثل المراحل الضمنية ، σ المراحل الصريحة وp تمثل رتبة الطريقة.

والطريقة في الجهة اليسرى تمثل بالطريقة الصريحة بينما الطريقة في الجهة اليمنى تمثل بالطريقة الضمنية وهي طريقة رانج – كوتا التجميعية الصريحة – الضمنية من الرتبة p والمراحل s و σ تكتب اختصاراً بالشكل الآتي

(IMEX - ARK) – (s , σ , p)

قيم ∈ معامل الصلابة	قيم الخطأ النسبي لطريقة (IMEX-ARK)-(2,2,2)- $A[\alpha]$-stable h		قيم الخطأ النسبي لطريقة (IMEX-ARK)- -stable $A[\alpha]$(2,2,2)- h/2		قيم معدل التقارب لطريقة (IMEX-ARK)- -stable $A[\alpha]$(2,2,2)-	
	قيمEU	قيمEV	قيمEU	قيمEV	قيمCU	قيمCV
1.00000	$2.68e^{-002}$	$2.46e^{-002}$	$1.32e^{-002}$	$1.20e^{-002}$	1.01806	1.03393
0.39811	$2.68e^{-002}$	$2.66e^{-002}$	$1.32e^{-002}$	$1.01e^{-002}$	1.02214	1.03627
0.12589	$1.93e^{-002}$	$1.70e^{-002}$	$9.57e^{-003}$	$8.29e^{-003}$	1.00972	1.03642
0.03981	$1.56e^{-002}$	$1.59e^{-002}$	$7.72e^{-003}$	$7.83e^{-003}$	0.99062	1.01896
0.01585	$1.53e^{-002}$	$1.62e^{-002}$	$7.75e^{-003}$	$8.05e^{-003}$	0.98424	1.00995
0.00631	$1.54e^{-002}$	$1.66e^{-002}$	$7.77e^{-003}$	$8.24e^{-003}$	0.98034	1.00599
0.00251	$1.54e^{-002}$	$1.68e^{-002}$	$7.79e^{-003}$	$8.35e^{-003}$	0.97986	1.00662
0.00100	$1.54e^{-002}$	$1.69e^{-002}$	$7.80e^{-003}$	$8.40e^{-003}$	0.97965	1.00664
0.00040	$1.54e^{-002}$	$1.70e^{-002}$	$7.80e^{-003}$	$8.43e^{-003}$	0.97957	1.00662
0.00016	$1.54e^{-002}$	$1.70e^{-002}$	$7.80e^{-003}$	$8.44e^{-003}$	0.97956	1.00661
0.00006	$1.54e^{-002}$	$1.70e^{-002}$	$7. 80e^{-003}$	$8.44e^{-003}$	0.97954	1.00660
0.00001	$1.54e^{-002}$	$1.70e^{-002}$	$7.78e^{-003}$	$8.45e^{-003}$	0.97954	1.00660

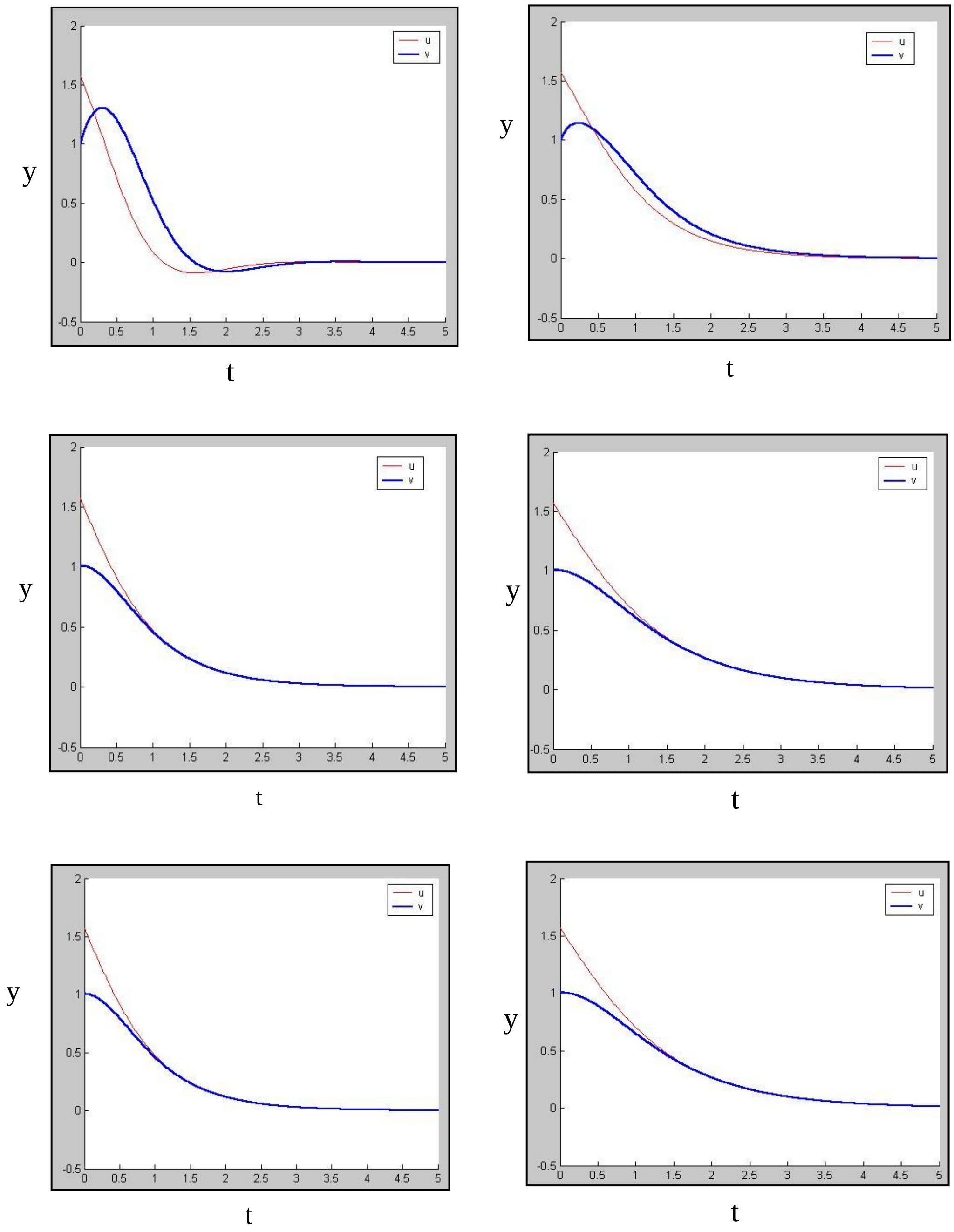
جدول (1.9) نتائج حل المسألة (1.8) بإستخدام طريقة (2,2,2)−(IMEX-ARK) ذات الاستقرارية− $A[\alpha]$ المعرفة بالطريقة (1.6.8)

يلاحظ من الجدول اعلاه ان الاستقرارية تعتمد على قيمة ∈ فكلما كانت ∈ صغيرة كانت الاستقرارية افضل الى ان تصل في النهاية الى الحالة الثابتة.

قيم $\in$ معامل الصلابة	قيم الخطأ النسبي لطريقة (IMEX-ARK)- -stable $A[\alpha](3,3,3)$- h		قيم الخطأ النسبي لطريقة (IMEX-ARK)- -stable $A[\alpha](3,3,3)$- h/2		قيم معدل التقارب لطريقة (IMEX-ARK)- -stable $A[\alpha](3,3,3)$-	
	قيمEU	قيمEV	قيمEU	قيمEV	قيمCU	قيمCV
1.00000	$5.96e^{-004}$	$2.10e^{-003}$	$2.20e^{-004}$	$1.28e^{-003}$	1.43755	0.71812
0.39811	$6.98e^{-004}$	$2.41e^{-003}$	$4.05e^{-004}$	$1.68e^{-003}$	1.28634	0.70181
0.12589	$7.56e^{-004}$	$1.23e^{-003}$	$3.10e^{-004}$	$1.11e^{-003}$	1.47698	1.00965
0.03981	$9.12e^{-004}$	$4.22e^{-003}$	$5.06e^{-004}$	$1.10e^{-003}$	1.80228	1.94442
0.01585	$1.15e^{-003}$	$5.76e^{-003}$	$6.27e^{-004}$	$2.46e^{-003}$	1.10448	1.15208
0.00631	$1.26e^{-003}$	$6.28e^{-003}$	$6.61e^{-004}$	$3.08e^{-003}$	0.97539	1.02933
0.00251	$1.26e^{-003}$	$6.41e^{-003}$	$6.68e^{-004}$	$3.25e^{-003}$	0.92225	0.97894
0.00100	$1.26e^{-003}$	$6.44e^{-003}$	$6.70e^{-004}$	$3.30e^{-003}$	0.91116	0.96771
0.00040	$1.26e^{-003}$	$6.45e^{-003}$	$6.70e^{-004}$	$3.30e^{-003}$	0.90910	0.96551
0.00016	$1.26e^{-003}$	$6.45e^{-003}$	$6.70e^{-004}$	$3.30e^{-003}$	0.90872	0.96508
0.00006	$1.26e^{-003}$	$6.45e^{-003}$	$6.70e^{-004}$	$3.31e^{-003}$	0.90863	0.96503
0.00001	$1.26e^{-003}$	$6.45e^{-003}$	$6.70e^{-004}$	$3.31e^{-003}$	0.90862	0.96502

جدول (1.10) نتائج حل المسألة (1.8) بإستخدام طريقة (IMEX-ARK)-(3,3,3) ذات الاستقرارية -A[α] المعرفة بالطريقة (1.7.14)

يلاحظ من الجدول اعلاه كلما زادت عدد المراحل الطريقة الصريحة والضمنية اصبح الخطأ اقل وايضاً الاستقرارية تعتمد على قيمة $\in$ فكلما كانت $\in$ صغيرة كانت الاستقرارية افضل الى ان تصل في النهاية الى الحالة الثابتة.



شكل (1.11) الحل العددي للمسألة (1.8) باستخدام طريقة (2,2,2)-(IMEX-ARK) في

الجهة اليسرى والطريقة (3,3,3) -(IMEX-ARK) في الجهة اليمنى وذوات الاستقرارية - $A[\alpha]$ المعرفة بالطريقتين (1.6.8)،(1.7.14) عندما $\in = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-4}$

من الرسوم اعلاه يلاحظ سلوك الحل للمسائل الصلبة فكلما كانت $\in$ صغيرة كان الوصول الى الحل التقريبي افضل وتصبح الصلابة سهلة مع وجود قوة مغيرة سريعة ولكن الحل يهتم بالتغيرات البطيئة نسبيا

(1.12) الاستنتاجات

أن أهم ما تناوله البحث هو طرائق رانج–كوتا التجميعية الصريحة –الضمنية من الرتبتين الثانية والثالثة ذوات الاستقرارية $A[\alpha]-$ لحل نظام من المعادلات التفاضلية الصلبة غير الخطية بالصيغة $y' = f(y) + \frac{1}{\in} g(y)$ ، حيث $\in > 0$ يمثل عامل الصلابة وهذه الطرائق هي توسيع لمجال الاستقرارية للطرائق الصريحة التقليدية مع اكبر عدد من المراحل الضمنية. إن الطرائق من هذا الصنف هي مناسبة لحل مسائل التفاعلات الكيميائية التي تحتوي على حدود صلبة وغير صلبة .وتمت دراسة الاستقرارية العددية لطرائق (IMEX-ARK) من الرتبتين الثانية والثالثة ذوات الاستقرارية $A[\alpha]-$ وتطبيقها على الأنظمة الصلبة وقد تبين أن هذه الطرائق ناجحة في الأنظمة الصلبة إذ تم الحصول بها على نتائج جيدة . كذلك تمت دراسة طرائق (3,3,3) –(IMEX-ARK) ذوات الاستقرارية $A[\alpha]-$ لحل الأنظمة الصلبة وقد تبين أن هذه الطرائق ناجحة في الأنظمة الصلبة .فعند قيم معينة لـ (k) تعطى الطريقة، المستخدمة في الحل بطول خطوة h معين ، نتائج متباعدة بينما تعطي نفس الطريقة نتائج متقاربة إذا ما استخدمت من نفس طول الخطوة h لقيم أخرى للمعلمة k.وعليه يمكن تحديد افضل طريقة (IMEX-ARK) ذات الاستقرارية$-A[\alpha]$ و من الرتبتين الثانية والثالثة وذلك باختيار قيمة k التي تجعل α فترة مناسبة.

المصادر

[1] Araujo , A.L. , **A note on B-stability of splitting methods** ,AMS, http://www.mat.uc.pt/~alma/papers/B-stability N.pdf (2002).,(2002).

[2] Araujo , A.L. , Mu Rua , A .and Sanzserna, J.M **Symplectic methods based on decomposions** ,SIAM, Journal .Numer . Anal., Vol.34 , No.5,(1997), p(1926-1947) .

[3] Cooper, G.J. and Sayfy, A**., Additive Runge kutta methods for stiff ODE' s** , Maths.Com. Vol.40, No.161,(1983), p(207-218).

[4] Eberhardt , B. and EtzmuB, O., **Implicit - Explicit Schemes for fast Animation with Particle systems,** http://www.gris.uni-tuebingen.de/publics/paper/Eberhardt-2000-Implicit Explicit.pdf, (2000).

[5] Kenndy, C.A. and Carpenter ,M.H. , **Additive Runge – Kutta Schemes for convection –diffusion–reaction equation ,** App. Num. math ., (2003) .

[6] Pantanio,C.,**A non-stiff Additive semi – implicit Runge –Kutta schemes for finite Rate reacting flows**, http://www.hyke.org /preprint/2004/ 01/014.pdf , (2003) .

[7] Pareschi,L. Russo ,G., **High order time discretization methods for hyperbolic systems with relaxation**, http://www2.unife.it/~prl , (2003) .

[8] Pareschi,L.,Russo,G.,**Implicit-Explicit Runge-Kutta schemes for stiff systems of differential equation**,Recent Trends in Num.Anal., (2000), p(269-289) .

[9] Pareschi,L.and Russo,G., **Implicit-Explicit Runge –Kutta and applications to hyperbolic systems with relaxation**, http://www.utenti.unife.it/lorenzo.pareschi/papers/imexrk-brown.zip, (2003).

[10] Hairer,E.and Wanner,G.,**Stiff differential equations solved by Radau methods**, Journal of Computational applied Mathematics (111),(1999), p(93-111).