Flow Stability Analysis of the Shallow Water Equations Model

Ashraf S. Aboudi
College of Computer Science and Mathematics
University of Mosul, Iraq

Received on: 30/11/2008 **Accepted on: 17/03/2009**

ABSTRACT

This paper is devoted to analyze the stability of shallow water of a system of equations that was exposed to disturbancing. This analysis is done by finding the eigenvalues of the system which enables us to investigate the grow of disturbance after setting shallow water equations in linearization form. It is obtain from the results analysis that the equations are stable when the real part of wave velocity is negative ,and unstable when it is positive.

Keywords: flow, stability analysis, shallow water equations model.

تحليل استقرارية الجريان لنموذج معادلات المياه الضحلة

أشرف سمعان عبودي
كلية علوم الحاسبات والرياضيات، جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث:2008/11/30 **تاريخ قبول البحث:2009/3/17**

الملخص

هذا البحث مكرس لتحليل الاستقرارية لمنظومة من معادلات المياه الضحلة التي تعرضت لاضطراب، وهذا التحليل تم عن طريق إيجاد القيم الذاتية (Eigenvalues) للمنظومة التي تمكننا من إيجاد نمو الاضطراب من عدمه وذلك بعد جعل معادلات المياه الضحلة خطية (Linearization). وتبين من نتائج التحليل ان هذه المعادلات تكون في حالة استقرار عندما يكون الجزء الحقيقي لسرعة الموجة كمية سالبة ، ويكون في حالة عدم استقرار عندما تكون هذه الكمية موجبة.

الكلمات المفتاحية: الجريان، تحليل الاستقرارية، نموذج معادلات المياه الضحلة.

1- المقدمة:

معادلات المياه الضحلة (Shallow water equations) إحدى أنظمة المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية، وهي أسهل أشكال معادلات الحركة للمائع (Motion equations)، مشتقة من قانون حفظ الكتلة وقانون حفظ الزخم (Navier – Stokes equations) تستخدم معادلات المياه الضحلة وبشكل واسع في العديد من مجالات العلوم منها: علم حركة الموائع (Hydrodynamics) ضمن علم السوائل المتحركة الهيدروليكية (Hydraulics)، وفي علم المياه (Hydrology)، وفي علم المحيطات (Oceanography)

وظواهرها، وفي الأرصاد الجوية(Meteorology)، وفي مجال الهندسة والعديد من مسائل العلوم التطبيقية الأخرى) [6].

إن أي نظام ،ومنه نظام معادلات المياه الضحلة (Shallow water equations) مهما كانت طبيعته إذا وجد في حالة ما S فيقال أن الحالة S مستقرة (stable) إذا كانت الإزعاجات أو التأثيرات الخارجية التي يتعرض لها النظام لا تؤثر في الحالة S .وكذلك النظام الشمسي على سبيل المثال موجود حالياً في حالة معتمدة على الزمن ذلك أن الكواكب تدور حول الشمس بصورة منتظمة وفي حالة دخول جسم سماوي أضافي صغير إلى النظام الشمسي فان هذا النظام لا يتأثر بصورة مهمة إذ لا تتأثر الحالة الأصلية لهذا النظام بالإزعاجات الصغيرة , أي أن النظام الشمسي مستقر فيما له علاقة بهذه الإزعاجات . [2,7]

ومن الأمثلة المهمة الأخرى على مفهوم الاستقرارية (Stability) حركة الأمبيا تحت تأثير الانتشار Diffusion والانجذاب الكيميائي إذ أن هذا الأخير هو عبارة عن الحركة الناتجة عن التغيرات في تركيز المواد الكيميائية التي تفرزها الاميبا نفسها ,أن هذا النموذج يكون غير مستقر إذ كانت قابلية الحركة (Motility) أو معدل التحليل (Decay Rate) للمادة الجاذبة صغيرين أو إذا كان معدل الإفراز (Secretion Rate) أو قوة الانجذاب الكيميائي كبيرين .ولهذه الظاهرة أهمية كبيرة في علم الأحياء التطويري ,والمفهوم نفسه ينطبق على جميع الظواهر الطبيعية الآخرى . [8,9]

لقد كان اول من درس فكرة الآستقرارية هو العالم الفرنسي الكبير بوانكاريه (poincare) (1854–1912) والذي يُعد من كبار العلماء في العالم. ويقترن موضوع الاستقرار كذلك بأسم العالم الروسي ليبونوف (A.M. Laypunov) (1857–1918) إذ يُعد اسمه مرادفا لنظرية الاستقرار في العالم الغربي منذ عام 1960 وان أفكاره وجدت طريقها في الحقول المليئة بالأفكار الخصبة والمثمرة من التطبيقات في النظم الديناميكية غير الخطية خصوصاً بعد نشره واحداً من أكثر البحوث المهمة في عام 1892 وهذه هي المسألة العامة لاستقرارية الحركة (On the General Problem of the stability of Motion) [10].

2– نبذة تاريخية:

درس كل من العالمين William F.Spotz و Mark A. Taylor عام 1999 طرائق سريعة لحساب المشتقات الخاصة للدوال الكروية الشكل وذلك لاستخدامها في تقريبات Explicit time – stepping Approximation لمعادلات المياه الضحلة الكروية الشكل. لقد استخدم الترشيح (Filtering) لتحليل الاستقرارية لهذه الطريقة والاهتمام قد انصب على

استخدام طرائق الفورير والترشيح التوافقي الكروي ، وتبين أن نتيجة الطيف تتحقق تقريبا في ثلث الزمن لطريقة التحويل الطيفي (Spectral transform) .[12].

كذلك برهن العالم (Yong Zhou) عام 2000 ان سرعة انتشار معادلات المياه الضحلة هي سرعة غير محددة (infinite) وكذلك تم بيان ان الحل نفسه او المشتقة الاولى او حتى كليهما لا يمكن ان يتضاءل اسرع من $e^{-|x|}$ عند اللانهاية المنتظمة في أية فترة زمنية صغيرة $[0,\in]$.[16].

كذلك ناقش كل من العالمين Tomas Chacon و Antonio Dominguez عام 2004 نوعاً من الاشكال العددية المتوازنة من الرتبة الثانية لحل انظمة القطع الزائدة غير المتجانسة لقوانين حفظ الكتلة،ولقد تم اعطاء تقنية عامة لبناء مثل هذه الاشكال العددية وقد تم تطبيق هذه الاشكال على معادلات المياه الضحلة واعطت نتائج جيدة .[3]

لقد وجد العالمان Fernandez – Feria و Bohorquez عام 2006 الفروقات النوعية بالنسبة الى الاستقرارية المتوازية الخاصة لجريان المياه الضحلة عبر مستوي مائل بميل اختياري، نتائج هذه الاستقرارية تم استخدامها لمناقشة الحل العددي لمسألة معادلات المياه الضحلة غير الخطية عبر سطوح مائلة بميل اختياري. وقد توصل الى ان هنالك مطابقة بين نتائج الموجات الناتجة من المحاكاة العددية وبين التنبؤات لتحليل الاستقرارية للطريقة .[4]

كذلك درس كل من العالمين Luis P.Thomas وCarlos C.Pena عام 2006 الحلول البسيطة (smoth) لمعادلات المياه الضحلة، فقد وجدا ان المجموعة الكاملة للحلول نستطيع تصنيفها بانها واقعة باربع مجاميع متناظرة تبين هذه المجاميع الخصائص الفيزيائية. [5]

3- النموذج:

ليكن لدينا مقطع للمياه الضحلة ببعدين ،نرمز لمركبة السرعة للمحورين السيني والصادي بالرمزين u و v على الترتيب كما نرمز لمعدل ارتفاع السطح الافقي له بالرمز H، اذاكانت η تمثل انحراف السطح الافقي المنضغط عن معدله، واذا كانت $f = 2\Omega \sin(\varphi)$ ، حيث ان Ω تمثل الدوران الزاوي للارض، وان φ تمثل خط العرض، واذا رمزنا للزوجة بالرمز b ، وان f معامل القوة، عندئذ يمكن تمثيل معادلات المياه الضحلة بالشكل التالي [15]:

$$\frac{Du}{\partial t} - \mathrm{f}\mathrm{v} = -\mathrm{g}\frac{\partial \eta}{\partial \mathrm{x}} - bu$$

$$\frac{Dv}{\partial t} + \mathrm{f}\mathrm{u} = -\mathrm{g}\frac{\partial \eta}{\partial \mathrm{y}} - bv$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \mathrm{t}} = \frac{\partial (\mathrm{u}(\mathrm{H}+\eta))}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial (\mathrm{v}(\mathrm{H}+\eta))}{\partial \mathrm{y}} \qquad \ldots(1)$$

وبفرض ان :

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}$$

فان المعادلة (1) تصبح بالشكل :

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-fv=-g\frac{\partial\eta}{\partial x}-bu$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+fu=-g\frac{\partial\eta}{\partial y}-bv$$
$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \ldots(2)$$

حيث ان $u=u(H+\eta)$, $v=v(H+\eta)$

4- المعاملات والمعادلات اللابعدية: (Non Dimensional form)

لغرض ايجاد المعادلات اللابعدية، سوف نعرف بعض القيم اللابعدية وعلى افتراض ان u_0 هي مصدر السرعة وكالاتي [16]:

$$x=Lx^* \qquad y=Ly^* \qquad t=\frac{Lt^*}{u_0} \qquad v=u_0v^* \qquad u=u_0u^* \qquad \eta=\eta_0\eta^*$$

وبتعويض الكميات والقيم اللابعدية في (2) نحصل على المعادلات اللابعدية لمعادلات المياه الضحلة وكالاتي :

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*}+u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}-\frac{L}{u_0}fv^*=-\frac{g\eta_0}{u_0^2}\frac{\partial\eta^*}{\partial x^*}-\frac{L}{u_0}bu^*$$
$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*}+u^*\frac{\partial v^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial v^*}{\partial y^*}+\frac{L}{u_0}fu^*=-\frac{g\eta_0}{u_0^2}\frac{\partial\eta^*}{\partial y^*}-\frac{L}{u_0}bv^*$$
$$\frac{\partial\eta^*}{\partial t^*}=\frac{1}{\eta_0}\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+\frac{\partial v^*}{\partial y^*}\right) \qquad \ldots(3)$$

5- تحليل الاستقرارية: (Stability Analysis)

لغرض تحليل الاستقرارية لنموذج معادلات المياه الضحلة المعرفة بـ (3) نجزأ كلا من U^*, V^* باستخدام المعادلتين التاليتين

$$u^*(x,y,t)=u_1^*(x,y)+u_2^*(x,y,t)$$
$$v^*(x,y,t)=v_1^*(x,y)+v_2^*(x,y,t) \qquad \ldots(4)$$

حيث ان $u_1^*(x,y), v_1^*(x,y)$ هما الجزآن المستقران و يكونان صغيرين جدا مقارنة بالجزء الآخر ،وهو الجزء المهم في حساب الاستقرارية لـ $u_2^*(x,y,t), v_2^*(x,y,t)$ [1] .

الآن وبتعويض المعادلة (3) في المعادلة (2) نحصل على :

$$\frac{\partial(u_1^*+u_2^*)}{\partial t^*}+(u_1^*+u_2^*)\frac{\partial(u_1^*+u_2^*)}{\partial x^*}+(v_1^*+v_2^*)\frac{\partial(u_1^*+u_2^*)}{\partial y^*}-\frac{L}{u_0}f(v_1^*+v_2^*)$$
$$=-(g_1+g_2)\frac{n_0}{u_0^2}\frac{\partial(\eta_1^*+\eta_2^*)}{\partial x^*}-b\frac{L}{u_0}(u_1^*+u_2^*) \qquad \ldots(4)$$

$$\frac{\partial(v_1^*+v_2^*)}{\partial t^*}+(u_1^*+u_2^*)\frac{\partial(v_1^*+v_2^*)}{\partial x^*}+(v_1^*+v_2^*)\frac{\partial(v_1^*+v_2^*)}{\partial y^*}-\frac{L}{u_0}f(u_1^*+u_2^*)$$
$$=-(g_1+g_2)\frac{\partial(\eta_1^*+\eta_2^*)}{\partial y^*}-b((v_1^*+v_2^*) \qquad \ldots(5)$$

$$\frac{\partial(\eta_1^*+\eta_2^*)}{\partial t^*}=\frac{1}{\eta_0}\left(\frac{\partial(u_1^*+u_2^*)}{\partial x^*}+\frac{\partial(v_1^*+v_2^*)}{\partial y^*}\right) \qquad \ldots(6)$$

وبتبسيط المعادلات (4)،(5)،(6) نحصل على :

$$\frac{\partial u_1^*}{\partial t^*}+\frac{\partial u_2^*}{\partial t^*}+u_1^*\frac{\partial u_1^*}{\partial x^*}+u_2^*\frac{\partial u_2^*}{\partial x^*}+v_1^*\frac{\partial u_1^*}{\partial y^*}+v_2^*\frac{\partial u_2^*}{\partial y^*}-fv_1^*-fv_2^*$$
$$=-g_1\frac{\partial\eta_1^*}{\partial x^*}-g_2\frac{\partial\eta_2^*}{\partial x^*}-bu_1^*-bu_2^* \qquad \ldots(7)$$

$$\frac{\partial v_1^*}{\partial t^*}+\frac{\partial v_2^*}{\partial t^*}+u_1^*\frac{\partial v_1^*}{\partial x^*}+u_2^*\frac{\partial v_2^*}{\partial x^*}+v_1^*\frac{\partial v_1^*}{\partial y^*}+v_2^*\frac{\partial v_2^*}{\partial y^*}+fu_1^*+fu_2^*$$
$$=-g_1\frac{\partial\eta_1^*}{\partial y^*}-g_2\frac{\partial\eta_2^*}{\partial y^*}-bv_1^*-bv_2^* \qquad \ldots(8)$$

$$\frac{\partial\eta_1^*}{\partial t^*}+\frac{\partial\eta_2^*}{\partial t^*}=\frac{\partial u_1^*}{\partial x^*}+\frac{\partial u_2^*}{\partial x^*}+\frac{\partial v_1^*}{\partial y^*}+\frac{\partial v_2^*}{\partial y^*} \qquad \ldots(9)$$

وبتجزئة المعادلات (7) ، (8) ، (9) الى حالتي الاستقرار والاضطراب نحصل على :

$$\frac{\partial u_1^*}{\partial t^*}+u_1^*\frac{\partial u_1^*}{\partial x^*}+v_1^*\frac{\partial u_1^*}{\partial y^*}-fv_1^*=-g_1\frac{\partial \eta_1^*}{\partial x^*}-bu_1^* \qquad \ldots(10)$$

$$\frac{\partial u_2^*}{\partial t^*}+u_2^*\frac{\partial u_2^*}{\partial x^*}+v_2^*\frac{\partial u_2^*}{\partial y^*}-fv_2^*=-g_2\frac{\partial \eta_2^*}{\partial x^*}-bu_2^* \qquad \ldots(11)$$

$$\frac{\partial v_1^*}{\partial t^*}+u_1^*\frac{\partial v_1^*}{\partial x^*}+v_1^*\frac{\partial v_1^*}{\partial y^*}+fu_1^*=-g_1\frac{\partial \eta_1^*}{\partial y^*}-bv_1^* \qquad \ldots(13)$$

$$\frac{\partial v_2^*}{\partial t^*}+u_2^*\frac{\partial v_2^*}{\partial x^*}+v_2^*\frac{\partial v_2^*}{\partial y^*}+fu_2^*=-g_2\frac{\partial \eta_2^*}{\partial y^*}-bv_2^*$$

$$\frac{\partial \eta_1^*}{\partial t^*}=\frac{\partial u_1^*}{\partial x^*}+\frac{\partial v_1^*}{\partial y^*} \qquad \ldots(14)$$

$$\frac{\partial \eta_2^*}{\partial t^*}=\frac{\partial u_2^*}{\partial x^*}+\frac{\partial v_2^*}{\partial y^*} \qquad \ldots(15)$$

ويمكن فرز المعادلات (11),(13),(15) التي تمثل الحالة غير الثابتة (Unsteady state) بكتابتها بالشكل:

$$\frac{\partial u_2^*}{\partial t^*}+u_2^*\frac{\partial u_2^*}{\partial x^*}+v_2^*\frac{\partial u_2^*}{\partial y^*}-fv_2^*=-g_2\frac{\partial \eta_2^*}{\partial x^*}-bu_2^*$$

$$\frac{\partial v_2^*}{\partial t^*}+u_2^*\frac{\partial v_2^*}{\partial x^*}+v_2^*\frac{\partial v_2^*}{\partial y^*}-fu_2^*=-g_2\frac{\partial \eta_2^*}{\partial y^*}-bv_2^*$$

$$\frac{\partial \eta_2^*}{\partial t^*}=\frac{\partial u_2^*}{\partial x^*}+\frac{\partial v_2^*}{\partial y^*} \qquad \ldots(16)$$

6- الاضطراب الحادث بالاتجاهين X , Y:

لإيجاد الحل لهذه المنظومة من المعادلات ،نتصور ان الاضطراب حاصل باتجاهين Y, X وان السعة ثابتة ،يمكن كتابة المعادلات بالصورة الاتية [11]

$$
\begin{aligned}
u_2^* &= A_1\, e^{\alpha t + i(k_1 x + k_2 y)} \\
v_2^* &= A_2\, e^{\alpha t + i(k_1 x + k_2 y)} \\
\eta_2^* &= A_3\, e^{\alpha t + i(k_1 x + k_2 y)}
\end{aligned} \qquad \ldots(17)
$$

حيث أن K_1 , K_2 قيم حقيقية لابعدية لطول الموجة بالاتجاه Y, X على التوالي ، α هي سرعة الموجة ، وهي قيمة معقدة (Complex) ($\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$) وان القيمة الموجبة او السالبة لـ α_1 بهذه الحالة هي التي تؤدي الى نمو الاضطراب او تلاشيه على التوالي ، فعندما تكون $\alpha_1 \rangle 0$ فالمنظومة تكون غير مستقرة (Unstable) وعندما تكون $\alpha \rangle 0$ فمنظومة المياه الضحلة Shallow water equations) تكون مستقرة (stable) [1]، كما أن A_1 , A_2 , A_3 ، ثوابت وتمثل سعة الموجة (Amplitude).

بعد إهمال الحدود الصغيرة وغير الخطية بالنسبة الى الاضطراب، يمكن كتابة منظومة المعادلات (1) بالشكل الآتي

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_2^*}{\partial t^*} - \frac{L}{u_0} f v_2^* &= -\frac{g_2 \eta_0}{u_0^2}\frac{\partial \eta_2^*}{\partial x^*} - \frac{L}{u_0} b u_2^* \\
\frac{\partial v_2^*}{\partial t^*} - \frac{L}{u_0} f u_2^* &= -\frac{g_2 \eta_0}{u_0^2}\frac{\partial \eta_2^*}{\partial y^*} - \frac{L}{u_0} b v_2^* \\
\frac{\partial \eta_2^*}{\partial t^*} &= \frac{1}{\eta_0}\left(\frac{\partial u_2^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_2^*}{\partial y^*}\right)
\end{aligned} \qquad \ldots(18)
$$

وبتعويض (17) في (18) نحصل على ما يأتي :

$$\frac{\partial u_2^*}{\partial t}-\frac{L}{u_0}fv_2^*=-\frac{\eta_0}{u_0^2}g_2\frac{\partial\eta_2^*}{\partial x^*}-\frac{L}{u_0}bu_2^*$$

$$\frac{\partial(A_1e^{\alpha t+i(k_1x+k_2y)})}{\partial t}-\frac{L}{u_0}f(A_2e^{\alpha t+i(k_1x+k_2y)})=-g_2\frac{\eta_0}{u_0^2}\frac{\partial(A_3e^{\alpha t+i(k_1x+k_2y)})}{\partial x}-\frac{L}{u_0}b(A_1e^{\alpha t+i(k_1x+k_2y)})$$

$$\alpha A_1e^{\alpha t+i(k_1x+k_2y)}-\frac{A_2L}{u_0}fe^{\alpha t+i(k_1x+k_2y)}=-\frac{g_2A_3\eta_0}{u_0^2}K_1ie^{\alpha t+i(k_1x+k_2y)}-\frac{A_1L}{u_0^2}be^{\alpha t+i(k_1x+k_2y)}$$

$$(\alpha A_1-\frac{A_2L}{u_0}f+\frac{g_2A_3\eta_0}{u_0^2}K_1i+\frac{A_1L}{u_0^2}b)e^{\alpha t+i(k_1x+k_2y)}=0$$

وبما أن:

$$e^{\alpha t+i(k_1x+k_2y)}\neq 0$$

فان:

$$(\alpha A_1-\frac{A_2L}{u_0}f+\frac{g_2A_3\eta_0}{u_0^2}K_1i+\frac{A_1L}{u_0^2}b)=0 \qquad \ldots(19)$$

كذلك فان

$$\frac{\partial v_2^*}{\partial t^*}-\frac{L}{u_0}fu_2^*=-\frac{\eta_0g_2}{u_0^2}\frac{\partial\eta_2^*}{\partial y^*}-\frac{L}{u_0}bv_2^*$$

فان :

$$(\alpha A_2-\frac{A_1L}{u_0}f+\frac{g_2ik_2A_3\eta_0}{u_0^2}+\frac{A_2L}{u_0}b)=0 \qquad \ldots(20)$$

وكذلك

$$-\frac{A_1K_1i}{\eta_0}-\frac{A_2K_2i}{\eta_0}+\alpha A_3=0 \qquad \ldots(21)$$

وبجمع الحدود المتشابهة وترتيب المعادلات(19) ,(20) , (21) نحصل على ما يأتي :

$$
\begin{aligned}
&(\alpha u_0^2 + Lb)\,A_1 - L u_0 f\, A_2 + g_2 \eta_0\, i k_1\, A_3 = 0 \\
&-L u_0 f\, A_1 + (\alpha u_0^2 + L u_0 b)\,A_2 + g_2\, k_2 \eta_0\, i\, A_3 = 0 \\
&-i k_1 A_1 - i k_2\, A_2 + \alpha\eta_0\, A_3 = 0 \qquad \ldots(22)
\end{aligned}
$$

ومن خلال هذه المعادلة نقوم بإيجاد القيم الذاتية (EigenValues) وذلك بكتابة نظام المعادلات (22) بالشكل الآتي [14]:

$$
\begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ s_4 & s_5 & s_6 \\ s_7 & s_8 & s_9 \end{bmatrix} = 0
$$

حيث أن:

$$
s_1 = \alpha u_0^2 + Lbu_2 \quad s_2 = -L u_0 f v_2 \quad s_3 = g_2 \eta_0\, i k_1 \quad s_4 = L u_0 f u_2
$$

$$
s_5 = \alpha u_0^2 + L u_0 b v_2 \quad s_6 = g_2 \eta_0\, i k_2 \quad s_7 = -i k_1 \quad s_8 = -i k_2 \quad s_9 = \alpha\eta_0
$$

$$
det\left(\begin{bmatrix} S_1 & S_2 & S_3 \\ S_4 & S_5 & S_6 \\ S_7 & S_8 & S_9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0
$$

$$
\begin{vmatrix} (\alpha u_0 + Lbu_2) - \lambda & -L u_0 f v_2 & g_2 \eta_0 i k_1 \\ L u_0 f u_2 & (\alpha u_0^2 + L u_0 b v_2) - \lambda & g_2 \eta_0 i k_2 \\ -ik_1 & -ik_2 & \alpha\eta_0 - \lambda \end{vmatrix} = 0
$$

و بايجاد قيمة المحدد :

$$
[(\alpha u_0 + Lbu_2) - \lambda] * \begin{vmatrix} (\alpha u_0^2 + L u_0 b v_2) - \lambda & g_2 \eta_0 i k_2 \\ -ik_2 & \alpha\eta_0 - \lambda \end{vmatrix} + L u_0 f v_2 * \begin{vmatrix} L u_0 f u_2 & g_2 \eta_0 i k_2 \\ -ik_1 & \alpha\eta_0 - \lambda \end{vmatrix}
$$

$$
+ g_2 \eta_0 i k_1 * \begin{vmatrix} L u_0 f u_2 & (\alpha u_0^2 + L u_0 b v_2) - \lambda \\ -ik_1 & -ik_2 \end{vmatrix} = 0
$$

$$
\begin{aligned}
&[(\alpha u_0^2 + Lbu_2) - \lambda] * [((\alpha u_0^2 + L u_0 b v_2) - \lambda)(\alpha\eta_0 - \lambda) + (g_2 \eta_0 i * i k_2^2)] + L u_0 f v_2 \\
&* \{(\alpha\eta_0 - \lambda) * L u_0 f u_2 + i^2 k_1 * g_2 \eta_0 k_2\} + g_2 \eta_0 i k_1 * \{L u_0 f u_2 * (-ik_2) + ik_1 * \{(\alpha u_0^2 + L u_0 b v_2) - \lambda\}\} = 0
\end{aligned}
$$

وبالتبسيط :−

$$[(\alpha u_0^2 + Lbu_2) - \lambda] * [\alpha^2 u_0^2\eta_0 + \alpha\eta_0 LU_0 bv_2 - \alpha\eta_0\lambda - \alpha\lambda u_0^2 - \lambda \mathrm{L}\, \mathrm{u}_0 bv_2 + \lambda^2 - g_2\eta_0 k_2^2] + L u_0 fv_2$$
$$* [L u_0 fu_2(\alpha\eta_0 - \lambda) + i^2 g_2 k_1 k_2 \eta_0] + g_2\eta_0 ik_1 * [-ik_2 L u_0 fu_2 + ik_1((\alpha u_0^2 + L u_0 bv_2) - \lambda] = 0$$
$$[(\alpha u_0^2 + Lbu_2) - \lambda] * [\alpha^2 u_0^2\eta_0 + \alpha\eta_0 L u_0 bv_2 - \alpha\eta_0\lambda - \alpha\lambda u_0^2 - \lambda \mathrm{L}\, \mathrm{u}_0 bv_2 + \lambda^2] + L u_0 fv_2 [L u_0 fu_2 \alpha\eta_0$$
$$- L u_0 fu_2\lambda + i^2 k_1 k_2 g_2 \eta_0] + g_2\eta_0 ik_1[-L u_0 fu_2 ik_2 + \alpha u_0^2 ik_1 + L u_0 bv_2 ik_1 - ik_1\lambda] = 0$$

وبفتح الأقواس وإعادة ترتيب الحدود نجد أن :

$$\alpha^3 u_0^4\eta_0 + Lbu_2\alpha^2 u_0^2\eta_0 - \alpha^2 u_0^2\eta_0\lambda + \alpha^2 u_0^3\eta_0 Lbv_2 + L^2 bu_2 bv_2 \alpha\eta_0 u_0 - \lambda\alpha\eta_0 L u_0 bv_2$$
$$-\alpha^2 u_0^2\eta_0\lambda - Lbu_2\alpha\eta_0\lambda + \alpha\eta_0\lambda^2 - \alpha^2 u_0^4\lambda - Lbu_2\alpha\lambda u_0^2 + \lambda^2\alpha u_0^2 - \alpha u_0^3 Lbv_2\lambda - L^2 bu_2 u_0 bv_2\lambda$$
$$+\lambda^2 L u_0 bv_2 + \alpha u_0^2\lambda^2 + Lbu_2\lambda^2 - \lambda^3 + L^2 u_0^2 fv_2 fu_2 \alpha\eta_0 - L^2 u_0^2 fv_2 f_{u_2}\lambda + L u_0 fv_2 i^2 k_1 k_2 g_2 \eta_0$$
$$- g_2\eta_0 i^2 k_1 L u_0 fu_2 k_2 + \alpha u_0^2 i^2 k_1^2 g_2 \eta_0 + g_2\eta_0 i^2 k_1^2 LU_0 bv_2 - i^2 k_1 \lambda g_2 \eta_0 k_1 = 0$$

وبتجميع الحدود المتشابهة والضرب ×(−1) نحصل على ما يأتي :

$$-\lambda^3 + (\alpha\eta_0 + \alpha u_0^2 + L u_0 bv_2 + \alpha u_0^2 + Lbu_2) * \lambda^2 + (-\alpha^2 u_0^2\eta_0 - \alpha\eta_0 L u_0 bv_2 - \alpha^2 \mathrm{u}_0^2\eta_0$$
$$- Lbu_2\alpha\eta_0 - \alpha^2 u_0^4 - Lbu_2\alpha u_0 - \alpha u_0^3 Lbv_2 - L^2 bu_2 u_0 bv_2 - L^2 u_0^2 fv_2 fu_2 - i^2 k_1^2 g_2\eta_0) * \lambda$$
$$+(\alpha^3 u_0^4\eta_0 + Lbu_2\alpha^2 u_0^2\eta_0 + \alpha^2 u_0^3\eta_0 Lbv_2 + L^2 bu_2 bv_2\alpha\eta_0 u_0 + L^2 u_0^2 fv_2 fu_2\alpha\eta_0$$
$$+ L u_0 fv_2 i^2 k_1 k_2 g_2\eta_0 - g_2\eta_0 i^2 k_1 L u_0 fu_2 k_2 + \alpha u_0^2 i^2 k_1^2 g_2\eta_0 + g_2\eta_0 i^2 k_1^2 L u_0 bv_2) = 0$$
$$\lambda^3 + (-\alpha\eta_0 - 2\alpha u_0^2 - L u_0 bv_2 - Lbu_2) * \lambda^2 + (\alpha^2 u_0^2\eta_0 + \alpha\eta_0 L u_0 bv_2 + \alpha^2 u_0^2\eta_0 + Lbu_2\alpha\eta_0$$
$$+ \alpha^2 u_0^4 + Lbu_2\alpha u_0 + \alpha u_0^3 Lbv_2 + L^2 bu_2 u_0 bv_2 + L^2 u_0^2 fv_2 fu_2 + i^2 k_1^2 g_2\eta_0) * \lambda$$
$$-(\alpha^3 u_0^4\eta_0 + Lbu_2\alpha^2 u_0^2\eta_0 + \alpha^2 u_0^3\eta_0 Lbv_2 + L^2 bu_2 bv_2\alpha\eta_0 u_0 + L^2 u_0^2 fv_2 fu_2\alpha\eta_0$$
$$+ L u_0 fv_2 i^2 k_1 k_2 g_2\eta_0 - g_2\eta_0 i^2 k_1 L u_0 fu_2 k_2 + \alpha u_0^2 i^2 k_1^2 g_2\eta_0 + g_2\eta_0 i^2 k_1^2 L u_0 bv_2) = 0$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$\lambda^3 + \xi_1\lambda^2 + \xi_2\lambda + \xi_3 = 0 \qquad \ldots(23)$$

حيث أن :

$$\xi_1 = -\alpha\eta_0 - 2\alpha\, u_0^2 - L\, u_0 b v_2 - L b u_2$$

$$\xi_2 = \alpha^2\, u_0^2 \eta_0 + \alpha\eta_0 L\, u_0 b v_2 + \alpha^2\, u_0^2 \eta_0 + L b u_2 \alpha\eta_0 + \alpha^2\, u_0^4 + L b u_2 \alpha\, u_0 + \alpha\, u_0^3 L b v_2$$
$$+ L^2 b u_2\, u_0 b v_2 + L^2\, u_0^2\, f v_2\, f u_2 + i^2 k_1^2 g_2 \eta_0$$

$$\xi_3 = -(\alpha^3\, u_0^4 \eta_0 + L b u_2 \alpha^2\, u_0^2 \eta_0 + \alpha^2 u_0^3 \eta_0 L b v_2 + L^2 b u_2 b v_2 \alpha\eta_0\, u_0 + L^2\, u_0^2\, f v_2\, f u_2 \alpha\eta_0$$
$$+ L\, u_0\, f v_2 i^2 k_1 k_2 g_2 \eta_0 - g_2 \eta_0 i^2 k_1 L\, u_0\, f u_2 k_2 + \alpha\, u_0^2 i^2 k_1^2 g_2 \eta_0 + g_2 \eta_0 i^2 k_1^2 L\, u_0 b v_2)$$

وبعد حل متعددة الحدود (23) برمجيا باستخدام نظام (Maple 11) [13] تم ايجاد جذورا لمعادلة P, ±q كما يأتي:

$$P = \frac{1}{6}[36\xi_2\xi_1 - 108\,\xi_3 - 8\,\xi_1^3 + 12\sqrt{12\,\xi_2^3 - 3\,\xi_2^2\,\xi_1^2 - 54\,\xi_2\xi_1\xi_3 + 81\,\xi_3^2 + 12\,\xi_3\xi_1^3}\ ]^{(1/3)}$$
$$- \frac{6(\frac{1}{3}\xi_2 - \frac{1}{9}\xi_1^2)}{[36\xi_2\xi_1 - 108\,\xi_3 - 8\,\xi_1^3 + 12\sqrt{12\,\xi_2^3 - 3\,\xi_2^2\,\xi_1^2 - 54\,\xi_2\xi_1\xi_3 + 81\,\xi_3^2 + 12\,\xi_3\xi_1^3}\ ]^{(1/3)}} - \frac{1}{3}\xi_1$$

$$q_1 = -\frac{1}{12}[36\xi_2\xi_1 - 108\,\xi_3 - 8\,\xi_1^3 + 12\sqrt{12\,\xi_2^3 - 3\,\xi_2^2\,\xi_1^2 - 54\,\xi_2\xi_1\xi_3 + 81\,\xi_3^2 + 12\,\xi_3\xi_1^3}\ ]^{(1/3)}$$
$$+ \frac{3(\ \frac{1}{3}\xi_2 - \frac{1}{9}\xi_1^2)}{[36\xi_2\xi_1 - 108\,\xi_3 - 8\,\xi_1^3 + 12\sqrt{12\,\xi_2^3 - 3\,\xi_2^2\,\xi_1^2 - 54\,\xi_2\xi_1\xi_3 + 81\,\xi_3^2 + 12\,\xi_3\xi_1^3}\ ]^{(1/3)}} - \frac{1}{3}\xi_1$$
$$+ \frac{1}{2} i\,\sqrt{3}\{\frac{1}{6}[36\xi_2\xi_1 - 108\,\xi_3 - 8\,\xi_1^3 + 12\sqrt{12\,\xi_2^3 - 3\,\xi_2^2\,\xi_1^2 - 54\,\xi_2\xi_1\xi_3 + 81\,\xi_3^2 + 12\,\xi_3\xi_1^3}\ ]^{(1/3)}$$
$$+ \frac{6(\frac{1}{3}\xi_2 - \frac{1}{9}\xi_1^2)}{[36\xi_2\xi_1 - 108\,\xi_3 - 8\,\xi_1^3 + 12\sqrt{12\,\xi_2^3 - 3\,\xi_2^2\,\xi_1^2 - 54\,\xi_2\xi_1\xi_3 + 81\,\xi_3^2 + 12\,\xi_3\xi_1^3}\ ]^{(1/3)}}\ \}$$

$$q_2 = -\frac{1}{12}[\ 36\xi_2\xi_1 - 108\,\xi_3 - 8\,\xi_1^3 + 12\sqrt{12\,\xi_2^3 - 3\,\xi_2^2\,\xi_1^2 - 54\,\xi_2\xi_1\xi_3 + 81\,\xi_3^2 + 12\,\xi_3\xi_1^3}\ ]^{(1/3)}$$
$$+ \frac{3(\ \frac{1}{3}\xi_2 - \frac{1}{9}\xi_1^2)}{[36\xi_2\xi_1 - 108\,\xi_3 - 8\,\xi_1^3 + 12\sqrt{12\,\xi_2^3 - 3\,\xi_2^2\,\xi_1^2 - 54\,\xi_2\xi_1\xi_3 + 81\,\xi_3^2 + 12\,\xi_3\xi_1^3}\ ]^{(1/3)}} - \frac{1}{3}\xi_1$$
$$- \frac{1}{2} i\,\sqrt{3}\{\frac{1}{6}[36\xi_2\xi_1 - 108\,\xi_3 - 8\,\xi_1^3 + 12\sqrt{12\,\xi_2^3 - 3\,\xi_2^2\,\xi_1^2 - 54\,\xi_2\xi_1\xi_3 + 81\,\xi_3^2 + 12\,\xi_3\xi_1^3}\ ]^{(1/3)}$$
$$+ \frac{6(\frac{1}{3}\xi_2 - \frac{1}{9}\xi_1^2)}{[36\xi_2\xi_1 - 108\,\xi_3 - 8\,\xi_1^3 + 12\sqrt{12\,\xi_2^3 - 3\,\xi_2^2\,\xi_1^2 - 54\,\xi_2\xi_1\xi_3 + 81\,\xi_3^2 + 12\,\xi_3\xi_1^3}\ ]^{(1/3)}}\ \}$$

ان التوصل الى حالة الاستقرار في نظام معادلات المياه الضحلة يتأثر بدرجة كبيرة بالكميات b_u, b_V, L, α, U_0 ،وهذا متوقع لان هذه الكميات تحدد صفات نظام معادلات المياه الضحلة وهي السرعة ،سعة الموجة، الطول واللزوجة على التوالي، وعند القيم التالية للمعلمات [15]

$g = 9.8 \quad bu_2 = 1 \quad bv_2 = 1 \quad \Omega = \frac{\pi}{12} \quad \psi = 0.5 \quad fu_2 = 0.131 \quad fv_2 = 0.131$

$fu = \Omega\, sin(\Psi) = 0.131 \quad k1 = 2 \quad k2 = 2 \quad u_0 = 1.3 \quad L = -1 \quad \eta_0 = 0.5$

وبتعويضها بالمعادلة (23) نحصل على :

$$\lambda^3 + (-3.88\,\alpha + 2.3)\,\lambda^2 + (4.5461\alpha^2 - 4.647\,\alpha - 18.27099791)\,\lambda + (-1.42805\alpha^3 + 1.9435\,\alpha^2 + 32.45949\,\alpha - 12.740\ ) = 0$$

ومن النتائج العددية، تبرز الحالات الآتية التي تميز حالة (الاستقرار من عدم الاستقرار) لنظام معادلات المياه الضحلة وكالاتي :

أولا:- الحالة الأولى: يكون نظام معادلات المياه الضحلة مستقراً في الحالات الآتية :

1- قيم q إعداد مركبة

-1 $b_{u2} = b_{v_2}$ و $b_{u_2} \geq 0\ ,\ b_{v_2} \geq 0$

-2 $\alpha \leq -3.6$ و $1.2 \leq \alpha \leq 3$

-3 $L < 0$ و $0.1 \leq L \leq 1.9$ و $9 \leq L \leq 10$

-4 $0.9 \leq u_0 \leq 1.8$

2- قيم p إعداد حقيقية سالبة

-1 $b_{u2} \neq b_{v2}\ ,\ b_{u_2} > 0,\ b_{v_2} > 0$

-2 $L = 0$

-3 $u_0 < 0$ و $u_0 \geq 1.9$

ثانيا : - الحالة الثانية: يكون نظام معادلات المياه الضحلة غير مستقر في الحالات آلاتية :

1- قيم q إعداد مركبة

-1 $b_{u2} = b_{v_2}$ و $b_{u_2} \leq -2\ ,\ b_{v_2} \leq -2$

-2 $\alpha \geq 3.1$

-3 $L \geq 11$

2- قيم p أعداد حقيقية موجبة عند $b_{u_2} \neq b_{v_2}\ ,\ b_{u_2} < 0,\ b_{v_2} < 0$.

الجدول (1)

قيم p,q المستقرة (0 < p ، 0 > q) بتغير بعض قيم سرعة الموجة

α	q_1, q_2	p
-3.6	-1.669110413 ± 380424589i	-12.9297717
-3.7	- 1.77662643 ± 3.382926108i	-13.10265471
-3.8	- 1.884502042 ± 3.383552027i	- 13.27499592
-3.9	- 1.992590380 ± 3.382315973i	- 13.44681924
-4	-2.100929873± 3.379227782i	-13.61814025
-4.1	- 2.209513149 ± 3.374293605i	- 13.78897370
-4.2	- 2.318333222± 3.36751595i	- 13.95933356
-4.3	- 2.427383465 ± 358893739i	- 14.12923307
-4.4	- 2.536657593 ±3.348422248i	- 14.29868481
-4.5	-2.646149632 ± 3.336093115i	- 14.46770074
-4.6	- 2.755853905 ± 3.321894245i	-14.63629219
. . .	. . .	. . .
-100	-171.2477660 ± 14.45043007i	-47.80446809

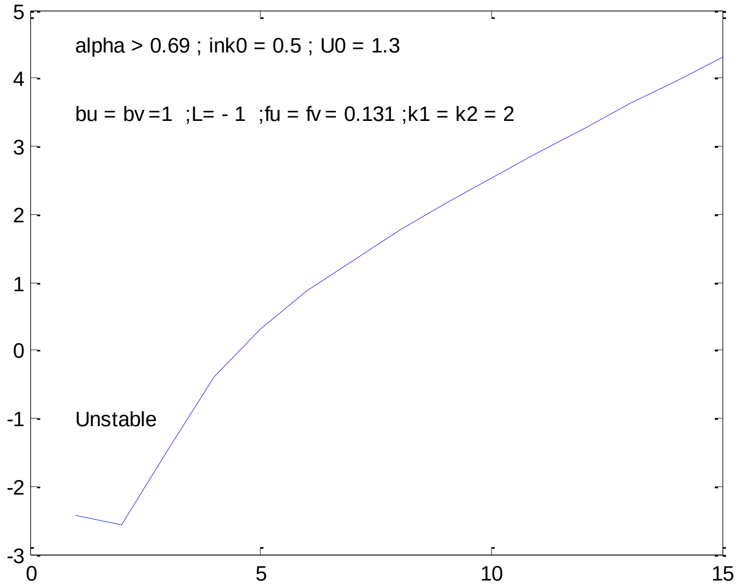
الجدول (2)

قيم p,q غير المستقرة (0 > p ، 0 > q) بتغير بعض قيم سرعة الموجة

α	q_1, q_2	p
10	16.6087165 ±2.231835409i	3.282566973
11	18.23662331 ±2.371432634i	3.906753387
12	19.87287394 ± 2.499991373i	4.514252118
13	21.51600871± 2.619823613i	5.107982590
14	23.16486497 ± 2.732573465i	5.690270067
15	24.81851161 ± 2.839447050i	6.262976789
16	26.47619815± 2.941352835i	6.827603706
17	28.13731558 ± 3.03891033i	7.385368840
18	29.80136623 ± 3.13292230i	7.937267546
19	31.46794055 ± 3.223557253i	8.484118893
20	33.13669925 ± 3.311284731i	9.026601497
. . .	. . .	. . .
100	168.0027048±7.447749846i	49.69459040

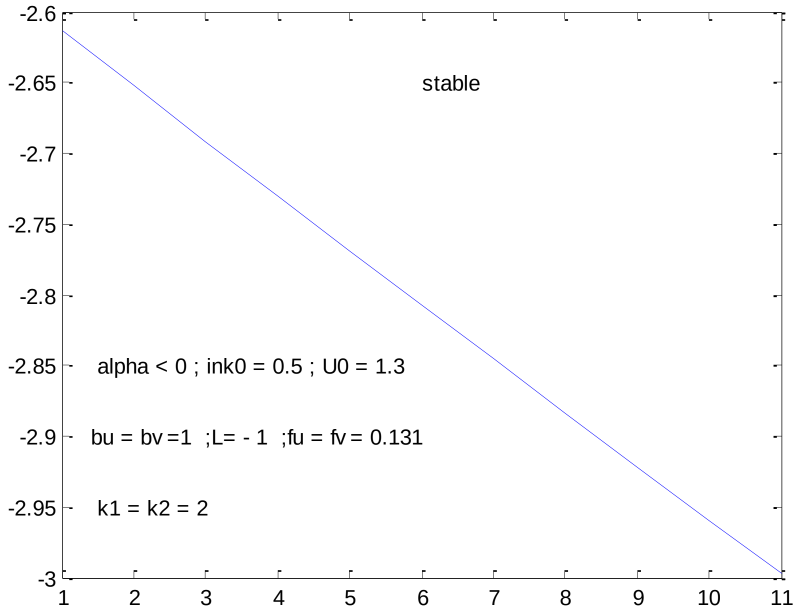
الشكل (1)

قيم p التي يكون عندها نظام معادلات المياه الضحلة غير مستقر



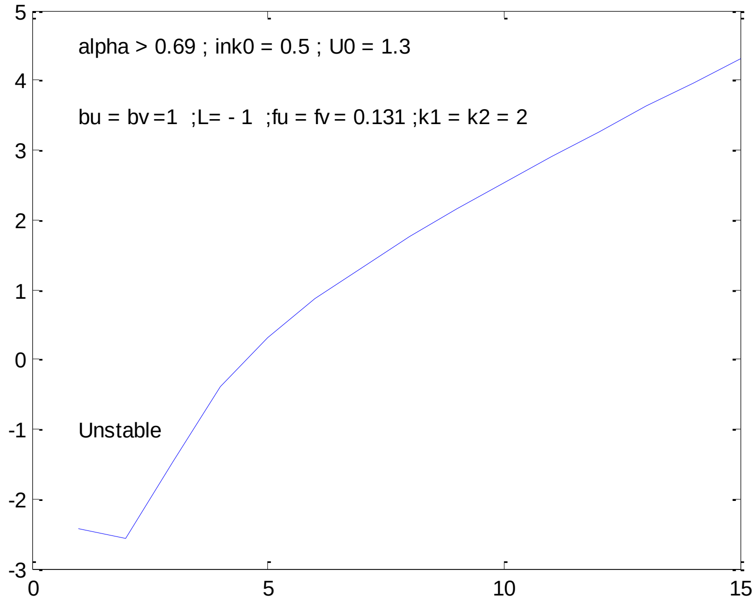
الشكل (2)

قيم p التي يكون عندها نظام معادلات المياه الضحلة مستقراً



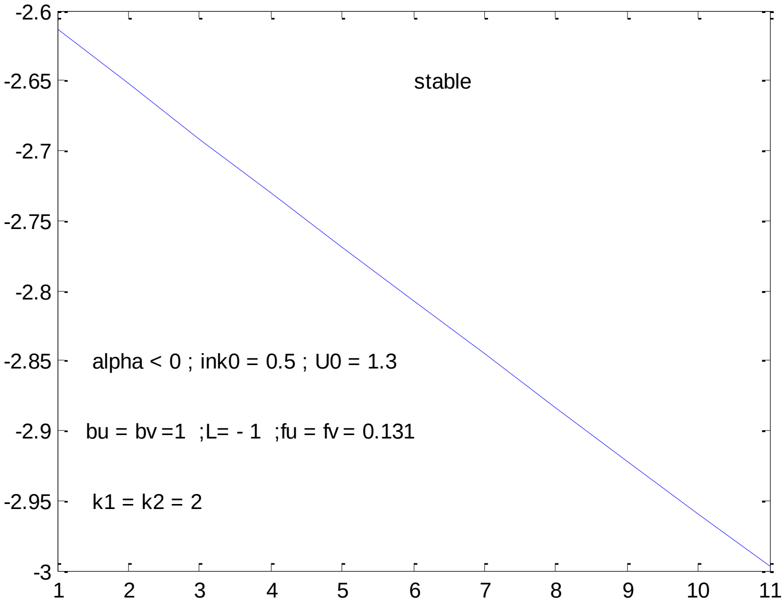
الشكل (3)

قيم q التي يكون عندها نظام معادلات المياه الضحلة غير مستقر



الشكل (4)

قيم q التي يكون عندها نظام معادلات المياه الضحلة مستقراً



7- الاستنتاجات:

لقد قمنا بإيجاد قيم سرعة الموجة α اذ انها قيمة معقدة $(\alpha = \alpha_1 + \alpha_2)$ وان القيمة الموجبة او السالبة لـ α_1 تؤثر في حالة نمو الاضطراب او تلاشيه. لقد تمت تجزئة نظام المعادلات الى جزأين الجزء الأول (المستقر) يكون صغيرا جدا مقارنة بالجزء الثاني والمهم في تحليل الاستقرارية، وتم إيجاد الحل، القيم الذاتية (EigenValues) والمعادلة المميزة (Characteristic polynomial) بالنسبة للجزء الثاني،ثم قمنا بحلها برمجيا باستخدام نظام (Maple 11) والحصول على قيم سرعة الموجة α ، وبإعطاء قيم المعلمات $(g, bu_2, bv, \Omega, \psi, fu_2, fv_2, k1, k2, u_0, L, \eta_0)$ تبين ان هذه المنظومة تكون في حالة استقرار عند :

1 – قيم q إعداد مركبة

-1 $bu_2 \geq 0\ ,\ bv_2 \geq 0$ و $bu_2 = bv_2$

-2 $1.2 \leq \alpha \leq 3$ و $\alpha \leq -3.6$

-3 $9 \leq L \leq 10$ و $0.1 \leq L \leq 1.9$ و $L < 0$

-4 $0.9 \leq u_0 \leq 1.8$

2 – قيم p إعداد حقيقية سالبة

-1 $bu_2 \neq bv_2\ ,\ bu_2 > 0,\ bv_2 > 0$

- 2 $L = 0$

-3 $u_0 \geq 1.9$ و $u_0 < 0$

وبعكسه فان المنظومة تكون في حالة عدم استقرار .

المصادر

[1] Ahmad, R. A. , 2003, " A Mathematical Model for the Effect of Electrical Conductivities of the Wall on the stability of fluid flow and Transition to chaos"chapter(4), pp35-43.

[2] AL-Obaidi, M.F. and Abraham , B.M., 2001"Stability Analysis and Chaos in a Bend Duct", Raf. J. Sci., Vol. 12, No. 1, pp. 91-99.

[3] Antonio, D.Delgado and Tomas C.Rebollo, 2004 "Asymptotically balnced schemes for non-homogeneous hyperbolic systems – application to the Shallow Water equations"journal of Comptes Rendus math., ISSN 1631- 073x, pp85-90 .

[4] Bohorquez and Fernandez-Feria,2006 " Non parallel spatial stability of shallow water flow down an inclined plane of arbitrary slop".

[5] Carlos, C.Pena and Luis P.Thomas,2006, "Soluitions of shallow water equations In Non-rectangular Cross- Section channels".

[6] David, A.Randall, 2006 ,"The Shallow Water Equations",pp1-3.

[7] David, L. George , 2004 " Numerical Approximation of the Nonlinear Shallow Water Equations with Topography and Dry Beds",pp5-8.

[8] Fortunato, M., Kurizki, G. and Schleich W.P., 1998 " Stabilization of Deterministically Chaotic Systems by Interference and Quantum Measurements The Ikeda Map Case Physical Review Letters" , Vol. 80, No.26,PP 5730-5733.

[9] Gilbert, S. , 1980, " Linear Algebra and it's Applications",second Edition , Academic Press, New York .

[10] Henry, M. P. and Robert J.S., 1978 "Introduction to Dynamics and control" ,McGraw-Hill,London .

[11] Logan, J. D., 1987 " Applied Mathematics Wiley and Sony".

[12] Mark, A.Taylor and William F.Spotz,1999, "Fast and Hight – order solution to the Sperical shallow watr equation"

[13] Monagan, M.B., 2003, " Maple 11 Advanced Programming Guid ".

[14] Thomas, L.Harman, 2000,"Advanced Engineering Mathematics with Matlab",second edition.

[15] Shallow Water equations -Wikipedia,2007, http://en.wikipedia.org/wiki/Shallow water equations.

[16] Yong, Zhou,2000, “Infinite propagation speed for ashallow water equation”.

[17] Zhaug, D. S ., Wei G. W. , Kouri D. J. & Hoffman Q.K., 1997, “Burger’s Equation with High Reynolds Number”, J. Phys. Fluid 9(6), pp. 1853 −1855.