Weiner Polynomials for Generalization of Distance for Some Special Graphs

Ali A. Ali **Ahmed M. Ali**
aliazizali1933@yahoo.com *ahmedgraph@uomosul.edu.iq*
College of Computer Sciences and Mathematics
University of Mosul, Iraq

Received on: 08/03/2006 **Accepted on: 04/04/2006**

ABSTRACT

The minimum distance of a vertex v to an $(n-1)-$set of vertices of a graph G is defined as :

$d_n(v,S) = \min\{d(v,u): \ u \in S\}$.

The n-Wiener polynomial for this distance of a graph G is defined as

$W_n(G;x) = \sum_{k=0}^{\delta_n} C_n(G,k)\, x^k$,

where $C_n(G,k)$ is the number of order pairs (v,S),, such that $|S| = n-1$

$d_n(v,S) = k$,

and δ_n is the diameter for this minimum n-distance.

In this paper, the n-Wiener polynomials for some types of graphs such as complete graphs, bipartite graphs, star graphs, wheel graphs, path and cycle graphs are obtained .The n-Wiener index for each of these special graphs is given. Moreover, some properties of the coefficients of are established. $W_n(G;x)$

Keywords: n-distance , Wiener polynomial , Special graphs.

متعددات حدود وينر لتعميم المسافة لبعض البيانات الخاصة

علي عزيز علي **أحمد محمد علي**
كلية علوم الحاسبات والرياضيات، جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث:2006/3/8 **تاريخ قبول البحث:2006/4/4**

الملخص

المسافة الصغرى بين الرأس v والمجموعة S المكونة من $(n-1)$ من رؤوس بيان G تعرف بـ

$d_n(v,S) = \min\{d(v,u): \ u \in S\}$

كما تعرف متعددة حدود وينر لهذه المسافة بالصيغة

$W_n(G;x) = \sum_{k=0}^{\delta_n} C_n(G,k)\, x^k$

إذ أن $C_n(G,k)$ هو عدد الأزواج المرتبة(v,S)، $|S| = n-1$، بحيث أن $d_n(v,S) = k$

علما بأن δ_n هو القطر بالنسبة إلى المسافة الصغرى.

تضمن هذا البحث إيجاد متعددة حدود وينر −n لبعض أصناف البيانات الخاصة كالبيانات التامة والثنائية التجزئة التامة، وبيان النجمة وبيان عجلة وبيانات الدروب وبيانات الدارات. كما أوجدنا دليل وينر لهذه البيانات بالنسبة إلى هذه المسافة−n . فضلاً عن إثبات بعض خواص معاملات $W_n(G;x)$.

الكلمات المفتاحية : المسافة − n ، متعددة حدود وينر ، بيانات خاصة.

(1)المقدمة Introduction

لقد قام العديد من الباحثين بتعريف المسافة بين مجموعتين غير خاليتين من رؤوس بيان متصل بصيغ مختلفة (لاحظ المصدرين[3] ،[4]).

لتكنA وB أي مجموعتين غير خاليتين من الرؤوس في بيان متصل منتهى $G = (V,E)$، إذ أنه ليس من الضروري أن تكون المجموعتان A وB مختلفتين، فقد عرف بعض الباحثين المسافة بين مجموعتين A وB، في البيان Gبأساليب مختلفة نذكر بعضاً منها.

المسافة الصغرى (the minimum distance): من المجموعة A إلى المجموعة B في البيان Gتعرف على أنها

$$d_{min}(A,B) = \min\{d(a,b) : a \in A, b \in B\}$$

مسافة المعدل(the average distance): من المجموعة A إلى المجموعة BفيG تعرف كالأتي

$$d_{ave}(A,B) = \frac{1}{|A||B|}\sum_{a\in A, b\in B} d(a,b)$$

المسافة العظمى (the maximum distance): من المجموعة A إلى المجموعة B في G هي

$$d_{max}(A,B) = \max\{d(a,b) : a \in A, b \in B\}$$

نلاحظ عندما تكون المجموعتان A و B ، أحاديتين فأن كلا من الأنواع الثلاثة من هذه المسافات تتطابق مع المسافة الاعتيادية المعروفة بين رأسين[2] .

لأجل أن نعرف القطر ونصف القطر للبيان المتصل G بالنسبة إلى كل من الأصناف الثلاثة للمسافة، نعرف أولا:

الاختلاف المركزي $-n$ لرأس v (the n- eccentricity of a vertex v): على أنه أكبر مسافة من $\{v\}$ إلى كل مجموعة جزئية S من رؤوس G، إذ أن $|S| = n-1$, $n \geq 2$، أي أن الاختلاف المركزي $-n$ للرأس المنفرد v هو

$$e_M(v,n) = \max\{d_M(v,S) : S \subseteq V\,,\, |S| = n-1\}$$

إذ أن d_M هي دالة المسافة لأي من الأنواع الثلاثة (إما .max أو .ave أو .min) .

نلاحظ أنه عندما تكون $n = 2$ ، فأن التعاريف السابقة للمسافة تعطي تعريف الاختلاف المركزي الاعتيادي للرأس v [2].

ويمكن أن نعرف

الاختلاف المركزي $-n$ للمجموعة S (the n- eccentricity of a set S): مكونة من $(n-1)$ من الرؤوس على أنه أعظم مسافة بين المجموعة S وأي رأس أخر v في G، أي أن

$$e_M(S) = \max\{d_M(v,S) : v \in V\}$$

ونلاحظ أيضا أنه عندما تكون $|S| = 1$، فأن التعاريف السابقة للمسافة تؤدي إلى تعريف الاختلاف المركزي الاعتيادي.

وأخيرا إن الأنواع الثلاثة من الاختلافات المركزية-n لرأس v مرتبطة مع الاختلاف المركزي الاعتيادي بالعلاقة الآتية [4] .

$$e(v) - n + 1 \leq e_{min}(v,n) \leq e_{ave}(v,n) \leq e_{max}(v,n) = e(v)$$

استنادا إلى الاختلاف المركزي $-n$ ، $n \geq 2$ يعرف القطر $-n$ ونصف القطر-n كالآتي:

نصف القطر $-n$ (n-radius): لبيان G هو أصغر الاختلافات المركزية $-n$ لكل رؤوس البيان G، أي أن

$$n - rad_M(G) = \min\{e_M(v,n) : \forall\, v \in V\}$$

وأن **قطر $-n$ (n-diameter):** لبيان G هو أعظم الاختلافات المركزية $-n$ لكل رؤوس البيان G، أي أن

$$n - diam_M(G) = \max\{e_M(v,n) : \forall\, v \in V\}$$

ويمكن أن نعرف قطر $-n$ ونصف القطر $-n$ للبيان G بالاعتماد على الاختلاف المركزي $-n$ لمجموعة مكونة من $(n-1)$ من الرؤوس .كالأتي

نصف القطر–المجموعة–n (n-set-radius): لبيان G هو أصغر الاختلافات المركزية للمجموعات – $(n-1)$ من رؤوس G، أي أن

$$n-set-rad_M(G)=\min\{e_M(S)\,,\,S\subseteq V\}$$

قطر–المجموعة–n (n-set-diameter): لبيان G هو أعظم الاختلافات المركزية لكل المجموعات الجزئية المكونة من $(n-1)$ من رؤوس البيان G، أي أن

$$n-set-diam_M(G)=\max\{e_M(S)\,,\,S\subseteq V\}$$

واضح أن قطر–n وقطر–المجموعة–n يكونان متساويين دائما .

وفي بحثنا هذا سوف نفرض أن قيمة n هي على الأقل 2 وعلى الأكثر رتبة البيان G.

وسنركز بحثنا فيما يأتي على دالة المسافة الصغرى d_{min}.

واضح أنه إذا كان $A\bigcap B\neq\phi$ فأن $d_{min}(A,B)=0$.

في الحقيقة أن d_{min} تحقق الخواص الآتية على المجموعات الجزئية غير الخالية من رؤوس البيان G .أي أن

$$d_{min}\ (A,B)\geq 0$$
$$d_{min}\ (A,B)=0 \qquad \text{iff} \quad A\bigcap B\neq\phi$$
$$d_{min}\ (A,B)=d_{min}\ (B,A)$$

ولكن المتباينة المثلثية (triangle inequality)

$$d_{min}\ (A,B)+d_{min}\ (B,C)\geq d_{min}\ (A,C)$$

لا تتحقق بصورة عامة ، إذ أن B, A و C مجموعات جزئية من الرؤوس غير خالية في G [3] .

المأخوذة التالية توضح الشرط الضروري لجعل المتباينة المثلثية صحيحة بالنسبة إلى المسافة الصغرى.

المأخوذة(1.1) :[1]

لتكن A و C مجموعتين جزئيتين غير خاليتين من مجموعة رؤوس G، وليكن b رأسا في G . فأن

$$d_{min}\ (A,b)+d_{min}\ (b,C)\geq d_{min}\ (A,C)\ .$$

(2)بعض خواص متعددات حدود وينر لتعميم المسافة

Some Properties of the Wiener Polynomials for Generalized Distance

ستقتصر دراستنا في هذا البحث على دالة المسافة الصغرى فقط وعندما تكون المجموعة A أحادية.ولأجل ذلك نضع التعريف الأتي:

التعريف(2.1) :

ليكن G بيانا متصلا برتبة p، ولتكن S مجموعة $-(n-1)$ من رؤوس G، إذ أن $2 \le n \le p$، وليكن v أي رأس في G، فأن

$$d_n\,(v,S) = \min\{d(v,u):\ u \in S\})$$

واضح أن

عندما $v \in S$ فأن $d_n\,(v,S) = 0\ ;$

عندما $v \notin S$ فأن $d_n\,(v,S) \ge 1\ ;$

التعريف(2.2) :

ليكن $C_n\,(G,k)$ عدد الأزواج (v,S) والتي لكل منها المسافة الصغرى بين الرأس v والمجموعة S، $(|S| = n-1)$ هي k ، أي أن $d_n\,(v,S) = k$.

الآن نعرف متعددة حدود وينر $-n$ للبيان G بأنها متعددة الحدود

$$W_n\,(G;x) = \sum_{k=0}^{\delta_n} C_n\,(G,k)\,x^k \qquad \ldots (2.1)$$

إذ أن δ_n هو قطر $-n$ للبيان G المعرف بـ

$$\delta_n = diam_n(G) = \max\{\,d\,(v,S): v \in V\,, S \subseteq V\,, |S| = n-1\}$$

ويعرف دليل وينر $-n$ للبيان G، والذي يرمز له بـ $W_n\,(G)$ بأنه مجموع المسافات الصغرى لكل الأزواج (v,S) في البيان G، أي أن

$$W_n(G) = \sum_{\substack{(v,S)\\ v\in V, S\subseteq V}} d_n(v,S) \qquad \ldots (2.2)$$

إذ أن $|S| = n-1$.

وكذلك يمكن التعبير عن دليل وينر $-n$ بأنه مشتقة متعددة حدود وينر $-n$ لـ x عندما $x = 1$،

أي أن

$$W_n(G) = W'_n(G;x)\ \big|_{x=1} = \sum_{k=1}^{\delta_n} k\,C_n\,(G,k) \qquad \ldots (2.3)$$

ومن المفيد جدا ولأجل تسهيل كثير من المعالجات لمتعددات حدود وينر $-n$ سوف نذكر بعض خواص معاملات متعددات حدود وينر $-n$.

لنفرض أن $S \subseteq V(G)$، وأن $|S| = n-1$، $2 \le n \le p$. إذ أن G هو بيان متصل برتبة p.

(1) إن عدد الأزواج (v,S) التي نستطيع أن نكونها هو $p\binom{p}{n-1}$، وأن مجموع المعاملات هو

$$\sum_{i=1}^{\delta_n} C_n(G,i) = (p-n+1)\binom{p}{n-1} = p\binom{p-1}{n-1} \qquad \ldots(2.4)$$

(2) الحد المطلق في $W_n(G;x)$ هو

$$C_n(G,0) = p\binom{p-1}{n-2} \qquad \ldots(2.5)$$

(3) المأخوذة الآتية تعين لنا قيمة المعامل $C_n(G,1)$

المأخوذة (2.3):

لكل بيان متصل G برتبة p ولكل $2 \le n \le p$، يكون

$$C_n(G,1) = p\binom{p-1}{n-1} - \sum_{\forall v \in V}\binom{p-1-\deg_G v}{n-1};$$

البرهان:

لتكن $N(v)$ مجموعة الرؤوس المتجاورة مع الرأس v ولنفرض أن $\lambda(v)$ يمثل عدد المجموعات الجزئية S، إذ أن $|S| = n-1$، $v \notin S$ وأن $S \cap N(v) \ne \phi$ ، إذا لكل رأس v في G يكون

$$\lambda(v) = \binom{p-1}{n-1} - \binom{p-1-\deg_G v}{n-1}$$

وهكذا نحصل على

$$C_n(G,1) = \sum_{v \in V}\left\{\binom{p-1}{n-1} - \binom{p-1-\deg_G v}{n-1}\right\}$$
$$= p\binom{p-1}{n-1} - \sum_{v \in V}\binom{p-1-\deg_G v}{n-1}$$

التعريف(2.4):

ليكن v رأسا في بيان متصل G، ولنفرض أن $C_n(v,G,k)$ يمثل عدد المجموعات $-(n-1)$ والتي يمكن تكوينها من رؤوس البيان G والتي كل منها تبعد بمسافة k عن الرأس v. إذ أن $k \geq 0$ و $n \geq 3$

واضح من التعريف أعلاه أن

$$\sum_{v\in V} C_n(v,G,k) = C_n(G,k) \qquad \ldots (2.6)$$

لكل $k \geq 0$

ونعرف متعددة حدود وينر $-n$ بالنسبة إلى الرأس v بـ

$$W_n(v,G;x) = \sum_{k=0}^{\delta_n} C_n(v,G,k) x^k \qquad \ldots (2.7)$$

إذ أن δ_n هو القطر $-n$ للبيان G.

من (2.1)، (2.6)، (2.7) نستنتج أن

$$\sum_{v\in V} W_n(v,G;x) = W_n(G;x) \qquad \ldots (2.8)$$

والتي يمكن إثباتها بسهولة كالأتي:

بما أن

$$W_n(v,G;x) = \sum_{k=0}^{\delta_n} C_n(v,G,k)\, x^k$$

وبأخذ المجموع للطرفين لكل رأس v في $V(G)$ نحصل على

$$\begin{aligned}\sum_{v\in V} W_n(v,G;x) &= \sum_{v\in V}\sum_{k=0}^{\delta_n} C_n(v,G,k)\, x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\delta_n}\sum_{v\in V} C_n(v,G,k)\, x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\delta_n} C_n(G,k)\, x^k \\ &= W_n(G;x)\end{aligned}$$

(3) متعددات حدود وينر $-$ n لبعض البيانات الخاصة:

n-Wiener Polynomials of some Special Graphs:

نلاحظ في إيجاد متعددات حدود وينر نسبة للمسافة الاعتيادية ، أن بالإمكان الحصول على صيغة للحدودية عندما يكون للبيان انتظام معين بحيث يمكن حساب الصيغة العامة لمعامل x^k. وهذه الحالة نصادفها أيضا عند إيجاد متعددة حدود وينر$-n$ ، لذلك نأخذ بعض

البيانات الخاصة لأن لها انتظاماً كبيراً في تراكيبها . وقد أوجدنا في هذا البند متعددة حدود وينر $n-$ للبيان التام ، وللبيان الثنائي التجزئة التام ،ولبيان النجمة والعجلة ، ولبيان الدرب وكذلك لبيان الدارة . ونعتقد أنه بالإمكان إيجاد متعددة الحدود هذه لبيانات خاصة أخرى .

سوف نفرض أن S تمثل أي مجموعة جزئية مكونة من $(n-1)$ من رؤوس أي من البيانات الخاصة المذكورة لاحقا في هذا البند .

ونفرض أن الرمز $\lambda_k(v)$ يمثل عدد المجموعات الجزئية S في البيان G والتي كل منها تبعد بمسافة k عن الرأس v إذ أن $v \notin S$ ولكل من $k=1,2,\ldots,\delta_n$ ، علما أن δ_n هو القطر $n-$ للبيان G .

من السهولة ملاحظة أن

$$C_n(G,k)=\sum_{v\in V}\lambda_k(v) \qquad \ldots (3.1)$$

(3.1) بيان تام وبيان ثنائي التجزئة تام:

Complete and Complete bipartite graphs:

ليكن K_p بيانا تاما برتبة p ، إذا لكل $2\le n\le p$ ، فأن

$$C_n(K_p,0)=(n-1)\binom{p}{n-1}=p\binom{p-1}{n-2}$$

و

$$\lambda_1(v)=\binom{p-1}{n-1}$$

لكل $v\in V(K_p)$

وعليه فأن

$$C_n(K_p,1)=p\binom{p-1}{n-1}$$

وبما أن $\delta_n(K_p)=1$ ، فأن متعددة حدود وينر $n-$ للبيان التام هي

$$C_n(K_p;x)=p\binom{p-1}{n-2}+p\binom{p-1}{n-1}x \qquad \ldots (3.2)$$

لاحظ أن

$$W_2(K_p;x)=p+p(p-1)x\neq W(K_p;x)=p+\frac{1}{2}p(p-1)x$$

وذلك بسبب كون الزوج المرتب $(v,\{u\})$ لا يتطابق مع الزوج $(u,\{v\})$ عندما $u \neq v$. وبناءً على ذلك يستحسن أن نفرض أن $n \geq 3$ في العلاقة (3.2) .

واضح أن دليل وينر $n-$ للبيان التام K_p هو:

$$W_n(K_p) = p\binom{p-1}{n-1} \qquad \dots (3.3)$$

الآن نأخذ البيان الثنائي التجزئة التام $K_{\alpha,\beta}$ ، إذ أن مجموعتي التجزئة للرؤوس هما :

$$V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_\alpha\},$$
$$V_2 = \{v_{\alpha+1}, v_{\alpha+2}, \dots, v_{\alpha+\beta}\}.$$

لأجل إيجاد $W_n(K_{\alpha,\beta};x)$ نجد معاملات الحدود.

من العلاقة (2.5) فأن

$$C_n(K_{\alpha,\beta},0) = p\binom{p-1}{n-2}; \qquad p = \alpha+\beta$$

ومن المأخوذة (2.3) ، نحصل على

$$\begin{aligned} C_n(K_{\alpha,\beta},1) &= p\binom{p-1}{n-1} - \sum_{v \in V(K_{\alpha,\beta})} \binom{p-1-\deg v}{n-1} \\ &= p\binom{p-1}{n-1} - \left\{\alpha\binom{\alpha-1}{n-1} + \beta\binom{\beta-1}{n-1}\right\} \end{aligned}$$

وبما أن

$$C_n(K_{\alpha,\beta},1) + C_n(K_{\alpha,\beta},2) = p\binom{p-1}{n-1}$$

لأن قطر $n-$ للبيان الثنائي التجزئة التام هو 2 ، فأن

$$C_n(K_{\alpha,\beta},2) = \alpha(\binom{\alpha-1}{n-1} + \beta\binom{\beta-1}{n-1}$$

وبهذا نحصل مما تقدم على العبارة الآتية:

العبارة(3.1) :

لكل $\alpha \geq 2$ ، $\beta \geq 1$ و $3 \leq n \leq \alpha+\beta$ ، فأن متعددة حدود وينر $n-$ للبيان الثنائي التجزئة التام $K_{\alpha,\beta}$ هي :

$$W_n(K_{\alpha,\beta};x) = p\binom{p-1}{n-2} + \left\{ p\binom{p-1}{n-1} - \alpha\binom{\alpha-1}{n-1} - \beta\binom{\beta-1}{n-1} \right\} x + \left\{ \alpha\binom{\alpha-1}{n-1} + \beta\binom{\beta-1}{n-1} \right\} x^2 \qquad \dots (3.4)$$

إذ أن $p = \alpha + \beta$

واضح أن دليل وينر $-n$ للبيان $K_{\alpha,\beta}$ هو:

$$W_n(K_{\alpha,\beta}) = p\binom{p-1}{n-1} + \alpha\binom{\alpha-1}{n-1} + \beta\binom{\beta-1}{n-1} \qquad \dots (3.5)$$

(3.2) بيان نجمة وبيان عجلة: Star and Wheel graphs:

العبارة (3.2):

ليكن F_p بيان نجمة من الرتبة $p \ge 4$ ، فأن لكل $3 \le n \le p$ ، تكون

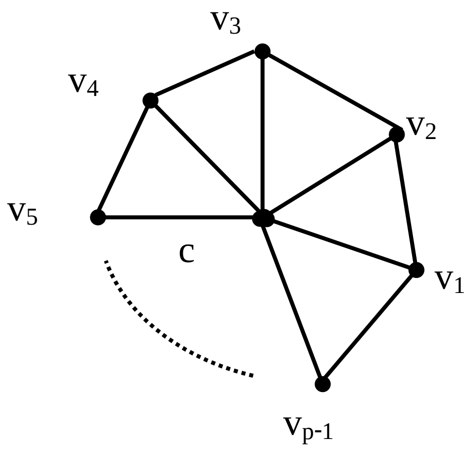
$$W_n(F_p;x) = p\binom{p-1}{n-2} + n\binom{p-1}{n-1} x + (p-1)\binom{p-2}{n-1} x^2 \qquad \dots (3.6)$$

$$W_n(F_p) = (2p-n)\binom{p-1}{n-1} \qquad \dots (3.7)$$

البرهان :

بما أن النجمة F_p هي بيان ثنائي التجزئة $K_{1,P-1}$،فأن تعويض $\alpha = 1$ و $\beta = p-1$ في العلاقتين (3.4) و(3.5) ،وإجراء بعض العمليات التبسيطية نحصل على العلاقتين (3.6) و (3.7) على الترتيب .

والآن نأخذ بيان العجلة E_p بالرتبة $p \ge 4$ المبينة في الشكل(3-1).



الشكل (3-1) بيان العجلة

واضح أن قطر $-n$ لبيان العجلة E_p هو 2 ، لكل $3 \le n \le p$

وعليه فأن

$$C_n(E_p,0) = p\binom{p-1}{n-2};$$
$$C_n(E_p,1) = p\binom{p-1}{n-1} - (p-1)\binom{p-4}{n-1};$$
$$C_n(E_p,2) = (p-1)\binom{p-4}{n-1}.$$

وهكذا نحصل على العبارة الآتية .

العبارة (3.3):

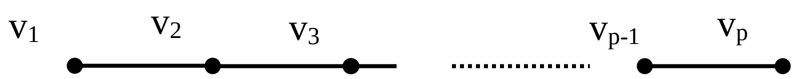
ليكن E_pبيان عجلة برتبة $p \ge 4$ ، فأن لكل $3 \le n \le p$ تكون متعددة حدود وينر $-n$ لـ E_p بالصيغة الآتية:

$$W_n(E_p;x) = p\binom{p-1}{n-2} + \left\{p\binom{p-1}{n-1} - (p-1)\binom{p-4}{n-1}\right\}x + (p-1)\binom{p-4}{n-1}x^2 \quad \dots (3.8)$$

$$W_n(E_p) = p\binom{p-1}{n-1} + (p-1)\binom{p-4}{n-1} \quad \dots (3.9)$$

(3.3) بيان درب: Path graph:

ليكن R_p بيان درب برتبة p كما هو مبين في الشكل(3-2).



الشكل (3-2) بيان درب

المأخوذة الآتية تعين لنا قطر $-n$ لبيان درب R_p .

المأخوذة(3.4):

ليكن δ_nقطر$-n$ لبيان درب R_p ، فأن$\delta_n = p - n + 1$ لكل $2 \le n \le p$.

البرهان:

واضح أنه عندما n = 2 فأن $\delta_2 = p-1$ وهو قطر R_p ، ويساوي المسافة بين نهايتي R_p ، أي $d(v_1, v_p)$ وإذا كان n = 3 فأن أعظم مسافة-3 هي عندما يكون الرأس v_1 والمجموعة هي $\{v_p, v_{p-1}\}$ أو الرأس v_p والمجموعة هي $\{v_1, v_2\}$ إذا $\delta_3 = p-2$.

وبهذا نلاحظ أن أعظم مسافة-n في R_p تحصل عندما يكون الرأس هو إحدى النهايتين v_1 أو (v_p) وتكون المجموعة S مكونة من $(n-1)$ من الرؤوس هي $\{v_{p-n+2}, \ldots, v_{p-1}, v_p\}$ (أو $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$).

وعليه فأن

$$\delta_n = \max_{(v,S)} d_n(v,S) = p-(n-1)$$

وبهذا يتم البرهان

والآن نجد متعددة حدود وينر-n لبيان الدرب R_p .

المبرهنة(3.5) :

لكل $3 \le n \le p$ ، فأن متعددة حدود وينر-n لبيان درب R_p هي

$$W_n(R_p; x) = p\binom{p-1}{n-2} + \sum_{k=1}^{p-n+1} C_n(R_p, k)\, x^k \qquad \ldots (3.10)$$

إذ أن لكل $k = 1, 2, \ldots, p-n+1$ ، فأن

$$C_n(R_p, k) = \binom{p-2k}{1}\left\{2\binom{p-2k-1}{n-2} + \binom{p-2k-1}{n-3}\right\} + 2\sum_{i=k+1}^{2k}\binom{p-i}{n-2} \qquad \ldots (3.11)$$

البرهان:

من المأخوذة (3.4) ، فأن قطر-n للبيان R_p هو $\delta_n = p-n+1$.من العلاقة (2.4)، فأن

$$C_n(R_p, 0) = p\binom{p-1}{n-2}$$

وسنبرهن صحة معامل x^k ،عندما $1 \le k \le \delta_n$ ، بإيجاد $\lambda_k(v)$ إذ أن $v \in V(R_p)$ واستعمال العلاقة (3.1). ولأجل ذلك سوف نفرض أن S تتكون من $(n-1)$ من الرؤوس ولا يحتوي على الرأس v .

عندما يكون $k=1$ والرأس v_1 فأن S يجب أن تحتوي على v_2 وأي من $(n-2)$ من الرؤوس الباقية ، وهكذا فأن

$$\lambda_1(v_1)=\binom{p-2}{n-2}$$

وبالمثل فأن

$$\lambda_1(v_p)=\binom{p-2}{n-2}$$

أما بالنسبة إلى الرؤوس v_r ، $2\le r\le p-1$ ، فأن المجموعة S يجب أن تحتوي على v_{r-1} أو v_{r+1} أوكليهما، وعليه فأن

$$\lambda_1(v_r)=2\binom{p-3}{n-2}+\binom{p-3}{n-3}\ ,\quad 2\le r\le p$$

وهكذا نحصل على

$$C_n(R_p,1)=2\binom{p-2}{n-2}+\binom{p-2}{1}\left\{2\binom{p-3}{n-2}+\binom{p-3}{n-3}\right\}$$

التي تطابق ما نحصل عليه من العلاقة (3.11) بتعويض $k=1$.

والآن نفرض أن $k=2$ فإذا كان الرأس هو v_1 فأن مجموعة S لا تحتوي على v_2 ويجب أن تحتوي على v_3 مع $(n-2)$ من بقية الرؤوس التي عددها $(p-3)$ ، وعلية فأن

$$\lambda_2(v_1)=\binom{p-3}{n-2}$$

وبالمثل بالنسبة إلى الرأس v_p ، أي أن

$$\lambda_2(v_p)=\binom{p-3}{n-2}$$

وبالنسبة إلى الرأس v_2 فأن S لا تحتوي على v_1 و v_3 ويجب أن تحتوي على v_4 ، وعليه فأن

$$\lambda_2(v_2)=\binom{p-4}{n-2}$$

وبالمثل بالنسبة إلى الرأس v_{p-1} ، أي أن

$$\lambda_2(v_{p-1})=\binom{p-4}{n-2}$$

وبالنسبة إلى الرؤوس v_r ، $3 \le r \le p-2$ ، فأن المجموعة S يجب أن لا تحتوي على الرأس v_{r-1} ولا على v_{r+1} ولكن يجب أن تحتوي على v_{r-2} أو v_{r+2} أوكليهما ، وعلية نحصل على

$$\lambda_2(v_r) = 2\binom{p-5}{n-2} + \binom{p-5}{n-3}$$

وباستعمال العلاقة (3.1) نحصل على

$$C_n(R_p, 2) = 2\binom{p-3}{n-2} + 2\binom{p-4}{n-2} + \binom{p-4}{1}\left\{2\binom{p-5}{n-2} + \binom{p-5}{n-3}\right\}$$

والتي تطابق ما نحصل عليه من العلاقة (3.11) بتعويض $k=2$.

وبمتابعة الخطوات نفسها لقيم k الأخرى ، نحصل بصورة عامة على

$$\lambda_k(v_i) = \lambda_k(v_{p-i+1}) = \binom{p-k-i}{n-2}; \quad 1 \le i \le k$$

$$\lambda_k(v_i) = 2\binom{p-2k-1}{n-2} + \binom{p-2k-1}{n-3}; \quad k+1 \le i \le p-k$$

وباستعمال العلاقة (3.1) نحصل على

$$C_n(R_p, k) = \binom{p-2k}{1}\left\{2\binom{p-2k-1}{n-2} + \binom{p-2k-1}{n-3}\right\} + 2\sum_{i=k+1}^{2k}\binom{p-i}{n-2}$$

وبهذا يتم البرهان

النتيجة (3.6):

دليل وينر $-n$ لبيان درب R_p هو

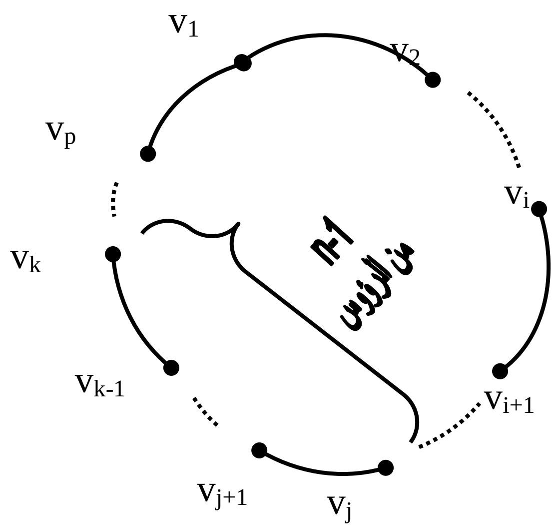
$$W_n(R_p) = \sum_{k=1}^{p-n+1} k\left[\binom{p-2k}{1}\left\{2\binom{p-2k-1}{n-2} + \binom{p-2k-1}{n-3}\right\} + 2\sum_{i=k+1}^{2k}\binom{p-i}{n-2}\right] \quad \ldots (3.12)$$

البرهان:

مباشرة يمكننا الحصول على العلاقة (3.12) وذلك باشتقاق الصيغة (3.10) بالنسبة إلى x والتعويض عن $x=1$ ، ثم بعد ذلك نعوض عن $C_n(R_p, k)$ بما يقابلها بالصيغة (3.11).

(3.4) بيان دارة: Cycle graph:

ليكن L_p بيان دارة برتبة p حيث أن $p \geq 3$ ، ولنفرض أن $3 \leq n \leq p$ ، فأن المأخوذة الآتية تعطينا قطر$-n$ للبيان L_p المبين في الشكل(3-3).



الشكل(3-3)

المأخوذة (3.7):

لكل $3 \leq n \leq p$ ، فأن قطر$-$**n** لبيان الدارة L_p هو :

$$\delta_n = \delta_n(L_p) = \left\lfloor \frac{p-n}{2} \right\rfloor + 1$$

البرهان:

لتكن **S** مجموعة $-(n-1)$ من رؤوس L_p أن v_i رأسا بحيث أن $d_n(v_i, S) = \delta_n(L_p)$.

ولما كان القطر$-$**n** هو أعظم مسافة$-$**n** من رأس إلى مجموعة $(n-1)$من الرؤوس، فأن**S** يجب أن تتكون من $(n-1)$ من الرؤوس المتتابعة والتي إحدى نهايتيها ولتكن v_j تبعد بمسافة عادية تساوي δ_n عن v_i ، والنهاية الأخرى تبعد مسافة عادية عن v_i تساوي δ_n أو $\delta_n + 1$. وعليه فأن

$$p=\begin{cases}2(\delta_n-1)+(n-1)+1\\ \\ (2\delta_n-1)+(n-1)+1\end{cases}$$ أو

أي

$$p=\begin{cases}2\delta_n-2+n\\ \\ 2\delta_n-1+n\end{cases}$$ أو

وبذلك فأن

$$\delta_n=\begin{cases}1+\dfrac{p-n}{2}\\ \\ 1+\dfrac{p-n-1}{2}\end{cases}$$ أو

ولما كان δ_n عددا صحيحا ، فأن

$$\delta_n=\left\lfloor\frac{p-n}{2}\right\rfloor+1$$

لاحظ النتيجة السابقة تتطابق مع نظيرتها في المسافة العادية ، أي عندما $n=2$.

المبرهنة (3.8) :

ليكن L_p بيان دارة برتبة **p**، $p\geq 3$ ، وليكن $3\leq n\leq p$ ، فأن متعددة حدود وينر **n**– هي:

$$W_n(L_p;x)=p\binom{p-1}{n-2}+p\sum_{k=1}^{\delta_n}\left\{2\binom{p-2k-1}{n-2}+\binom{p-2k-1}{n-3}\right\}x^k$$

إذ أن $$\delta_n=\left\lfloor\frac{p-n}{2}\right\rfloor+1$$

البرهان:

واضح أن

$$C_n(L_p,0)=p\binom{p-1}{n-2}$$

ليكن v_i أي رأس في L_p وأن S هي مجموعة $-(n-1)$ من الرؤوس بحيث أن $v_i \notin S$ وأن $d_n(v_i,S)=k$ لاحظ الشكل**(3-3)** .

إذا **S** لا تحتوي على أي من الرؤوس في المجموعة

$$U=\{v_i,v_{i-1},\dots,v_{i-k+1},v_{i+1},v_{i+2},\dots,v_{i+k-1}\}$$

ولكن S يجب أن تحتوي إما على v_{i+k} أو على v_{i-k} أو تحتوي على كليهما. وبذلك فأن هنالك ثلاث حالات للمجموعة S وهي :

$$v_{i+k}\in S,\ v_{i-k}\notin S; \qquad S\subseteq V(L_p)-[U\cup\{v_{i-k}\}]$$
$$v_{i-k}\in S,\ v_{i+k}\notin S; \qquad S\subseteq V(L_p)-[U\cup\{v_{i+k}\}]$$
$$v_{i-k},v_{i+k}\in S; \qquad S\subseteq V(L_p)-U$$

وبما أن $|U|=2k-1$.

واستنادا إلى هذه الحالات فأن عدد هكذا مجموعات هو:

$$\lambda_k(v_i)=2\binom{p-(2k+1)}{n-2}+\binom{p-(2k+1)}{n-3},\ \ 1\le i\le p$$

واستنادا إلى العلاقة **(3.1)**، فأن لكل $1\le k\le \delta_n$، يكون

$$C_n(L_p,k)=p\left\{2\binom{p-2k-1}{n-2}+\binom{p-2k-1}{n-3}\right\}$$

وبهذا يتم البرهان.

النتيجة (3.9):

دليل وينر**n**− لبيان دارة L_p برتبة p معطى بالصيغة الأتية:

$$W_n(L_p)=p\sum_{k=1}^{\delta_n}k\left\{2\binom{p-2k-1}{n-2}+\binom{p-2k-1}{n-3}\right\};$$

إذ أن $\delta_n=\left\lfloor\frac{p-n}{2}\right\rfloor+1$، وأن $3\le n\le p$.

البرهان:

باشتقاق متعددة حدود وينر**n**− لبيان الدارة L_p بالنسبة إلى x والتعويض عن $x=1$ نحصل على الصيغة أعلاه .

المصادر

(1) احمد محمد علي **(2005)** .متعددات حدود وينر لتعميم المسافة في البيانات رسالة ماجستير .جامعة الموصل

(2) علي عزيز علي (**1983)** . مقدمة في نظرية البيانات وتطبيقاتها.الموصل:جامعة الموصل.

[3] Buckley F. and F. Harary; (1990) **Distance in Graphs**. Addison - Wesley, New York.

[4] Dankelmann, P.; W. Goddard; M. A. Henning and H. C. Swart, (1999) “Generalized eccentricity, radius and diameter in graphs”, Foundation for Research Development. c **John Wiely & Sons**, Inc. Networks 34: 312-319.