Representation of a Standard Continuous Function by a Microscope

Tahir H. Ismail — *tahir_hsis@uomosul.edu.iq*
Hind Y. Saleh — *hind.saleh@uod.ac*
College of Computer Sciences and Mathematics
University of Mosul, Iraq

Received on: 22/4/2010 **Accepted on: 29/6/2010**

ABSTRACT

The aim of this paper is to provide a representation of a standard continuous function and a standard differentiable function by mean of a microscope.

More precisely, under certain conditions, the following results have been obtained.

Let F be a standard continuous function define on $\boldsymbol{R}$, and $^{\circ}G$ the shadow of it's graph. If there exists a standard point $X_0 \in \boldsymbol{R}$ and an interval I_0 about X_0 such that : $\forall X \in I_0, \big(X, F(X)\big)$ *limited* $\Rightarrow X \simeq X_0$.

(i) Furthermore If there exist X_1, X_2 limited in I_0 such that $F(X_1)$, $F(X_2)$ are infinitely large with opposite sign, then $^{\circ}G$ contains the vertical line Δ of the equation $^{\circ}X = X_0$.

(ii) If there exist a standard number α, $X \in I_0$ and if $F(X)$ is limited such that $^{\circ}F(X) \leq \alpha$ (resp. $^{\circ}F(X) \geq \alpha$). Also if there exist X_1, X_2 limited in I_0 such that $F(X_1) < 0$ is infinitely large (resp. $F(X_1) > 0$) and $F(X_2) \simeq \alpha$,then $^{\circ}G$ contains the half line Δ_α defined by :

$$\Delta_\alpha = \{(X,Y) \in \boldsymbol{R}^2 : {}^{\circ}X = X_0 , {}^{\circ}Y \leq \alpha \ \ (resp.\, {}^{\circ}Y \geq \alpha\ )\}$$

Let f be a standard function defined at a neighborhood at a standard point x_0 , then f is differentiable at x_0 **if and only if** under every microscope of power ε ,centered at $\big(x_0, f(x_0)\big)$,the representation of f is not a vertical line at $\big(x_0, f(x_0)\big)$.

Keywords: function, standard, continuous, differentiable, microscope.

تمثيل الدوال القياسية المستمرة بواسطة مجهر

طاهر حسن إسماعيل **هند يقضان صالح**
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث:2010/4/22 **تاريخ قبول البحث: 2010/6/29**

الملخص

الهدف من هذا البحث هو إعطاء تمثيل للدوال القياسية المستمرة والدوال القياسية القابلة للاشتقاق باستخدام مجهر.

بكلام أدق، وفق شروط معينة ، تم الحصول على النتائج الآتية :

لتكن F دالة قياسية مستمرة ومعرفة على $\boldsymbol{R}$ ، و $^{\circ}G$ الشبح لبيانها G ، نفرض انه توجد نقطة قياسية $X_0 \in \boldsymbol{R}$ وفترة I_0 حول X_0 بحيث أن : لكل $X \in I_0$ ، $\big(X, F(X)\big)$ محدودة يؤدي إلى $X \simeq X_0$.

(i) بالإضافة إلى ذلك إذا وجدت نقطتان محدودتان X_1 ، X_2 في I_0 بحيث ان كل من $F(X_1)$ $F(X_2)$ متناهية الكبر بإشارات متعاكسة ، فان $^{\circ}G$ يحوي المستقيم العمودي Δ للمعادلة : $^{\circ}X = X_0$

(ii) إذا وجد عدد قياسي α و $X \in I_0$ و $F(X)$ محدودة بحيث أن $^{\circ}F(X) \leq \alpha$ ($^{\circ}F(X) \geq \alpha$ على الترتيب)، كذلك إذا وجدت نقطتان محدودتان X_1 ، X_2 في I_0 بحيث ان $F(X_1) < 0$ متناهية الكبر ($F(X_1) > 0$ على الترتيب)، وكان $F(X_2) \simeq \alpha$ ، فان $^{\circ}G$ يحوي على نصف المستقيم Δ_α المعرف كالأتي:

$$\Delta_\alpha = \{(X,Y) \in \boldsymbol{R}^2 : {^{\circ}X} = X_0 , {^{\circ}Y} \leq \alpha \ (\text{على الترتيب}\ {^{\circ}Y} \geq \alpha\ )\}$$

لتكن f دالة قياسية معرفة على جوار النقطة القياسية x_0 فان f قابلة للاشتقاق عند x_0 **إذا وفقط إذا** كان تحت كل مجهر بقوة ε متمركز عند النقطة $(x_0,f(x_0))$ يكون تمثيل الدالة f مستقيم غير عمودي عند $(x_0,f(x_0))$.

الكلمات المفتاحية: دالة، قياسية، مستمرة، قابلة للاشتقاق، مجهر.

1. المقدمة

سوف نستخدم خلال هذا البحث التعاريف والرموز الآتية :

إذا كان $\boldsymbol{x \in R}$ ، فيقال بان x **متناهي الصغر** ***infinitesimal*** إذا كان $|x| < r$ لكل $r \in \boldsymbol{R}^+$

إذا كان $\boldsymbol{x \in R}$ ، فيقال بان x **متناهي الكبر** ***Infinitely large*** إذا كان $|x| > r$ لكل $r \in \boldsymbol{R}^+$ ، فيما عدا ذلك يقال أن x **محدود** ***limited*** .

إذا كان $\boldsymbol{x \in R}$، فيقال بان x **مُقدر** ***appreciable*** إذا كان x محدود ولكن غير متناهي الصغر، (انظر [2],[3],[6],[12] و).

إذا كان x و y عنصران في $\boldsymbol{R}$ ، فيقال بان x، y **متناهيتا القرب** ***infinitely near*** (ويرمز لذلك $x \simeq y$) إذا وفقط إذا كان $x - y$ متناهية الصغر .

إذا كان x عنصرا في $\boldsymbol{R}$ فان مجموعة النقاط في $\boldsymbol{R}$ والتي تكون متناهية القرب من x تسمى **هالة** x ويرمز لها بالرمز $\boldsymbol{m(x)}$.

إذا كانت A مجموعة جزئية من $\boldsymbol{R}^2$ فان **هالة** A ، يرمز لها $\boldsymbol{m(A)}$، هي اتحاد هالات النقاط في A .

إذا كانت A_1 و A_2 مجموعتين جزئيتين من $\boldsymbol{R}^2$ فان A_1 و A_2 متناهيتي القرب إذا كانت لهما الهالة نفسها (أي $m(A_1) = m(A_2)$) .

إذا كانت x نقطة محدودة في $\boldsymbol{R}$ فإنها تكون متناهية القرب من نقطة قياسية وحيدة في $\boldsymbol{R}$ ، وان هذه النقطة الوحيدة تسمى شبح (***shadow***) أو الجزء القياسي (***standard part***) لـ x ، ويرمز لها $^{\circ}x$ أو $st(x)$.

يقال لأية مجموعة معرفة في "نظرية المجموعات لزيرميلو–فرانكل مع بديهية الاختيار يرمز لها (***ZFC***)" بأنها **مجموعة قياسية** ، ويقال للدالة التي يكون بيانها مجموعة قياسية بأنها **دالة قياسية** [*12*].

إذا كانت A مجموعة جزئية من $\boldsymbol{R}^2$ فان الشبح أو الجزء القياسي من A يرمز له $^{\circ}A$ أو $st(A)$ ويعرف بأنه المجموعة القياسية الوحيدة في $\boldsymbol{R}^2$ وتم الحصول عليها بأخذ الشبح لكل النقاط المحدودة في A.

إذا لم تكن للمجموعة A نقاط محدودة فيكون شبحها $^{\circ}A$ مجموعة خالية . (انظر [1],[7],[10]).

لتكن f دالة قياسية فيقال بان الدالة f **مستمرة** ، ***continuous*** عند النقطة القياسية x_0 إذا كان لكل نقطتين قياسيتين x_0 و x ؛ $x \simeq x_0$ يؤدي إلى $f(x) \simeq f(x_0)$ [*8*].

إذا كان $\varepsilon \neq 0$ فان **ε-كلاكسي** للنقطة x_0 ، ويرمز لها $\boldsymbol{\varepsilon - gal(x_0)}$ هي مجموعة النقاط التي بعدها عن x_0 هو على الأكثر من رتبة ε ، أي أن :

$$\varepsilon - gal(x_0) = \left\{x \in \boldsymbol{R} \;;\; \frac{x - x_0}{\varepsilon} \ \text{محدودة}\right\}$$

(انظر [4],[5],[9],[11]) .

يقال أن الدالة القياسية f قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 ،وقيمتها تساوي $f'(x_0)$ ، إذا كان لكل $x \simeq x_0$ ، $x \neq x_0$ ،[7]

$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

بديهية الانتقال [7]: لكل صيغة قياسية تحتوي على المتغيرات المستقلة $x, t_1, t_2, \dots, t_n$ فقط، فان الصيغة التالية تتحقق :

$$\forall^{st}\ t_1, t_2, \dots, t_n\ [\forall^{st} x\ F(x, t_1, t_2, \dots, t_n) \Longrightarrow \forall x\ F(x, t_1, t_2, \dots, t_n)]$$

وكذلك $\exists x\ F(x, t_1, t_2, \dots, t_n) \Longrightarrow \exists^{st} x\ F(x, t_1, t_2, \dots, t_n)$

مبرهنة القيمة المتوسطة : [8] إذا كانت f دالة مستمرة ومعرفة على الفترة $[a, b]$ بحيث أن $f(a) = \alpha$ و $f(b) = \beta$ ، وكانت $\alpha \le \gamma \le \beta$ ، فانه يوجد $c \in [a, b]$ بحيث $f(c) = \gamma$.

2.النتائج الرئيسة :

أعطينا التعاريف الآتية :

تعريف (2.1): إذا كان $\varepsilon > 0$ عدداً حقيقياً متناهي الصغر وكانت (x_0, y_0) نقطة في المستوي $\boldsymbol{R^2}$ فان المجهر بقوة ε والمتمركز عند النقطة (x_0, y_0) يعرف كالأتي :

$$\begin{cases} x - x_0 = \varepsilon X \\ y - y_0 = \varepsilon Y \end{cases}$$

حيث أن (X, Y) هي الإحداثيات تحت المجهر.

تعريف (2.2): يعرف تمثيل بيان دالة مستمرة f تحت مجهر بقوة ε متمركز عند نقطة $(x_0, f(x_0))$ على انه بيان دالة مستمرة F معرفة كالأتي:

$$F(X) = \frac{f(x_0 + \varepsilon X) - f(x_0)}{\varepsilon}$$

تعريف (2.3) : لتكن f دالة قياسية مستمرة و G بيانها، فان تمثيل الدالة f تحت مجهر متمركز عند نقطة من بيانها يسمى شبح البيان G ، ويرمز له ^{o}G تحت هذا المجهر.

المبرهنة التالية تبين لنا تمثيل الدوال القياسية القابلة الاشتقاق بواسطة مجهر

مبرهنة (2.4): لتكن f دالة قياسية قابلة للاشتقاق عند النقطة القياسية x_0 فان تمثيل الدالة f تحت كل مجهر بقوة $\varepsilon > 0$ متناهية الصغر مركزه $(x_0, f(x_0))$ هو مستقيم معادلته: $^{o}Y = f'(x_0)\ ^{o}X$ إذا كانت المشتقة محدودة ، والمستقيم $^{o}X = 0$ فيما عدا ذلك.

البرهان: إذا كان كل من f و x_0 قياسياً ، وان الدالة f قابلة للاشتقاق، فان تمثيل الدالة f تحت جميع المجاهر المتمركزة عند $(x_0,f(x_0))$ يكون المستقيم هو المماس لبيان الدالة f عند $(x_0,f(x_0))$.

لنفرض انه تحت جميع المجاهر المتمركزة عند $(x_0,f(x_0))$ ، حيث f ،x_0 قياسي هو مستقيم المعادلة $Y = aX$ ، حيث a عدد قياسي.

نستنتج انه في الإحداثيات (X,Y) للمجهر، الدالة f تحقق العلاقة :

لكل X محدود ، فان $Y \simeq aX$

لنفرض انه لكل X محدود وغير متناهي الصغر فان $\frac{Y}{X} \simeq a$

إذاً f و x_0 يحققان الخاصية الآتية :

لكل $\varepsilon > 0$ متناهي الصغر، ولكل $x \in \varepsilon - gal(x_0)$ و $x \notin m(x_0)$ ، فان

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \simeq a$$

هذا يعني لكل $x \simeq x_0$ و $x \neq x_0$ ، $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \simeq a = f'(x_0)$

ويقتضي أن $f'(x_0) \simeq \frac{Y}{X}$ وهذا يؤدي إلى $Y \simeq X\, f'(x_0)$

وبأخذ الشبح للطرفين نحصل على $°Y = °X\, f'(x_0)$

الآن إذا كانت $f'(x_0)$ متناهية الكبر نجد أن $Y \simeq X\, f'(x_0)$

يقتضي إن $X = \frac{Y}{f'(x_0)} \simeq 0$

فنحصل على $°X = 0$ عندما $f'(x_0)$ متناهية الكبر. ■

وكتعميم للمبرهنة (2.4) لدينا المبرهنة الآتية :

مبرهنة (2.5) : لتكن f دالة قياسية معرفة على جوار النقطة القياسية x_0 فان f قابلة للاشتقاق عند x_0 إذا وفقط إذا تحت كل مجهر بقوة ε متمركز عند النقطة $(x_0,f(x_0))$ يكون تمثيل الدالة f مستقيم غير عمودي عند $(x_0,f(x_0))$.

البرهان : حسب المبرهنة (2.4) ، فان تمثيل الدالة القياسية f والقابلة للاشتقاق عند النقطة القياسية x_0، هو المستقيم $Y = f'(x_0)\,X$ ، تحت كل مجهر متمركز عند النقطة $(x_0,f(x_0))$ او عند نقطة متناهية القرب منها .

بالعكس نفرض أن f دالة قياسية ولنفرض أننا نرى المستقيم $Y = f'(x_0)\,X$ تحت كل مجهر مركزه $(x_0,f(x_0))$ او نقطة متناهية القرب من هذا المركز.

إذا كان ميل هذا المستقيم هو العدد القياسي a تحت كل مجهر متمركز عند $(x_0,f(x_0))$ او نقطة متناهية القرب منها لدينا:

لكل X محدود ، $Y \simeq aX$ ، حيث $a = f'(x_0)$

إذا كان لكل X محدود، $(X \not\simeq 0)$ ، $\frac{Y}{X} \simeq a$

وعليه فان كلا من f و x_0 تحقق الأتي:

لكل $\varepsilon > 0$، $\varepsilon \simeq 0$، لكل $\beta \simeq x_0$، لكل $x \in \varepsilon - gal(\beta)$ ، $x \notin \varepsilon - m(\beta)$،

$$\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta} \simeq a$$

وهذا يعني انه لكل $\beta \simeq x_0$ ، لكل $x \simeq x_0$ ، $x \neq \beta$ ، فان

$$\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta} \simeq a$$

حسب التعريف في [7] ، فان f قابلة للاشتقاق عند x_0 . ■

مثال (2.6) : إذا كانت الدالة القياسية f معرفة كالأتي :

$$f(x)=\begin{cases} x^3 \sin\frac{1}{x^2} & if \quad x \neq 0 \\ 0 & if \quad x=0 \end{cases}$$

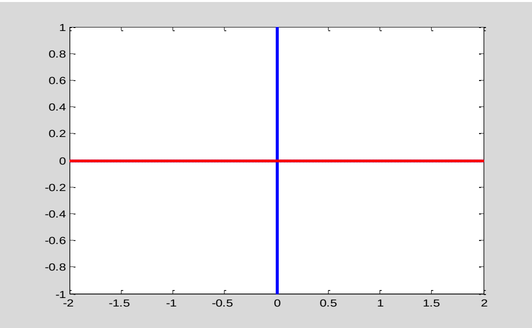
فان التمثيلات المختلفة للدالة f القابلة للاشتقاق تحت مجهر مركزه النقطة $(\eta, f(\eta))$ هي :

(i) مستقيم أفقي عندما $\frac{\eta^3}{\varepsilon}$ متناهية الصغر. **كما في الشكل (1)**

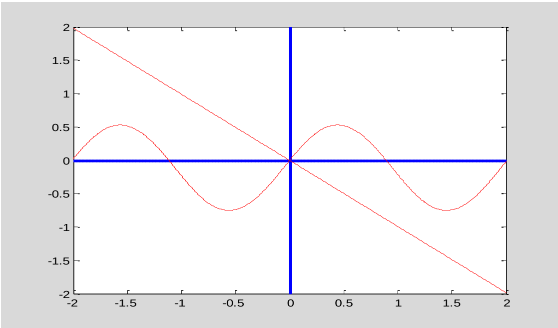
(ii) منحني جيبي عندما $\frac{\eta^3}{\varepsilon}$ محدودة غير متناهية الصغر. **كما في الشكل (2)**

(iii) مستقيم غير عمودي عندما $\frac{\eta^3}{\varepsilon}$ متناهية الكبر . **كما في الشكل (3)**

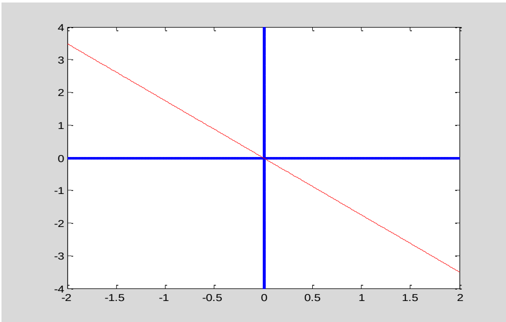
باستخدام برنامج ($Matlab$) حصلنا على الأشكال الآتية :



شكل (1)



شكل (2)



شكل (3)

البرهان : تحت مجهر بقوة $\varepsilon \simeq 0$ متمركز عند النقطة $(\eta, f(\eta))$ حيث $\eta \simeq 0$، وباستخدام تعريف (2.2) لدينا:

$$Y=\frac{1}{\varepsilon}\left[(\varepsilon X+\eta)^3 \sin\frac{1}{(\varepsilon X+\eta)^2}-\eta^3 \sin\frac{1}{\eta^2}\right]$$

$$Y=\frac{\eta^3}{\varepsilon}\left[\sin\frac{1}{(\varepsilon X+\eta)^2}-\sin\frac{1}{\eta^2}\right]+(\varepsilon^2X^3+3\varepsilon\eta X^2+3\eta^2X)\sin\frac{1}{(\varepsilon X+\eta)^2}$$

لقيم X المحدودة لدينا :

$$Y=\frac{\eta^3}{\varepsilon}\left[\sin\frac{1}{(\varepsilon X+\eta)^2}-\sin\frac{1}{\eta^2}\right]$$

ندرس الحالات الآتية :

(i) عندما $\frac{\eta^3}{\varepsilon}$ متناهية الصغر.

نجد أن Y متناهية الصغر لقيم X المحدودة وان التمثيل للدالة f تحت هذا المجهر هو المستقيم الأفقي

$$Y = 0$$

(ii) عندما $\frac{\eta^3}{\varepsilon}$ محدودة غير متناهية الصغر .

في هذه الحالة تكون $\frac{\varepsilon}{\eta} = \frac{\varepsilon}{\eta^3}\,\eta^2$ متناهية الصغر وان

$$\sin\frac{1}{(\varepsilon X+\eta)^2} = \sin\frac{1}{\eta^2\,(\frac{\varepsilon}{\eta}X+1)}$$

$$= \sin\frac{1}{\eta^2}(1-\frac{2\varepsilon}{\eta}X+\delta)$$

حيث δ متناهي الصغر بالنسبة الى $\frac{\varepsilon}{\eta}X$.

$$\simeq \sin\frac{1}{\eta^2}\ (1-\frac{2\varepsilon}{\eta}X)$$

عليه لقيم X المحدودة لدينا :

$$Y \simeq \frac{\eta^3}{\varepsilon}\left(\sin\left(\frac{1}{\eta^2}-\frac{2\varepsilon}{\eta^3}X\right)-\sin\frac{1}{\eta^2}\right)$$

نضع $K = \frac{\varepsilon}{\eta^3}$ نحصل على :

$$Y = \frac{1}{K}\left(\sin\left(\frac{1}{\eta^2}-2KX\right)-\sin\frac{1}{\eta^2}\right)$$

$$Y = \frac{1}{K}\left(\sin\frac{1}{\eta^2}\cos 2KX-\cos\frac{1}{\eta^2}\ \sin 2KX\right)-\frac{1}{K}\sin\frac{1}{\eta^2}$$

التمثيل للدالة f تحت هذا المجهر يكون منحني جيبي للمعادلة :

$$Y = {}^{\circ}\left(\frac{\sin\frac{1}{\eta^2}}{K}\right)(\cos(2^{\circ}KX)-1)-{}^{\circ}\left(\frac{\cos\frac{1}{\eta^2}}{K}\right)\sin\ (2^{\circ}KX)$$

(iii) عندما $\frac{\eta^3}{\varepsilon}$ متناهية الكبر

إذا كان X محدودا

$$\sin\left(\frac{1}{\eta^2}-2\frac{\varepsilon}{\eta^3}X+\frac{\delta}{\eta^2}\right) = \sin\frac{1}{\eta^2}+\left(\frac{\delta}{\eta^2}-2\frac{\varepsilon}{\eta^3}X\right)\cos\frac{1}{\eta^2}+\frac{\varepsilon^2}{\eta^6}\phi$$

حيث ϕ تكون متناهية الصغر وδ متناهية الصغر بالنسبة الى $\frac{\varepsilon}{\eta}X$.

عليه لقيم X المحدودة لدينا :

$$Y \simeq \frac{\eta^3}{\varepsilon}\left[\left(\frac{\delta}{\eta^2}-2\frac{\varepsilon}{\eta^3}X\right)\cos\frac{1}{\eta^2}+\frac{\varepsilon^2}{\eta^6}\phi\right]$$

$$Y \simeq \left(\delta\frac{\eta}{\varepsilon}-2X\right)\cos\frac{1}{\eta^2}+\frac{\varepsilon}{\eta^3}\phi$$

$$Y \simeq -2X\cos\frac{1}{\eta^2}$$

التمثيل للدالة f تحت المجهر هو مستقيم غير العمودي

$$°Y = -2\ °\left(cos\frac{1}{\eta^2}\right)\ °X$$

حيث ميله (الجزء القياسي لمشتقة f عند η) يأخذ كل القيم الواقعة بين $+2$ و -2 .

المبرهنة التالية تبين لنا تمثيل الدوال القياسية المستمرة غير قابلة الاشتقاق بواسطة مجهر

مبرهنة (2.7) : لتكن F دالة قياسية مستمرة ومعرفة على $\boldsymbol{R}$ ، و $°G$ الشبح لبيانها G ، نفرض انه توجد نقطة قياسية $X_0 \in \boldsymbol{R}$ وفترة I_0 حول X_0 بحيث أن : لكل $X \in I_0$ ، $\left(X, F(X)\right)$ محدودة ، يؤدي إلى $X \simeq X_0$.

(i) بالإضافة إلى ذلك إذا وجدت نقطتان محدودتان X_1 ، X_2 في I_0 بحيث ان كل من $F(X_1)$ $F(X_2)$ متناهية الكبر بإشارات متعاكسة ، فان $°G$ يحوي المستقيم العمودي Δ للمعادلة : $°X = X_0$

(ii) إذا وجد عدد قياسي α وI_0 و $X \in I_0$ و $F(X)$ محدودة بحيث أن $°F(X) \le \alpha$ ($°F(X) \ge \alpha$ على الترتيب)، كذلك إذا وجدت نقطتان محدودتان X_1 ، X_2 في I_0 ، بحيث أن $F(X_1) < 0$ متناهية الكبر ($F(X_1) > 0$ على الترتيب)، وكان $F(X_2) \simeq \alpha$ ، فان $°G$ يحوي على نصف المستقيم Δ_α المعرف كالأتي :

$$\Delta_\alpha = \left\{(X, Y) \in \boldsymbol{R}^2 : °X = X_0\ , °\ Y \le \alpha\ \ (\text{على الترتيب}\ \ °Y \ge \alpha\ )\right\}$$

البرهان :(i) لتكن (X_0, Y_0) نقطة قياسية للمستقيم Δ ، بما أن F دالة مستمرة و X_1 و X_2 نقطتان محدودتان تنتميان إلى I_0 ، بحيث $F(X_1)$ و $F(X_2)$ متناهية الكبر بإشارات متعاكسة ، وباستخدام نظرية القيمة المتوسطة توجد $X \in [X_1, X_2]$ (أو $X \in [X_2, X_1]$) بحيث أن $F(X) = Y$.

بما أن $\left(X, F(X)\right)$ نقطة محدودة من G وان $X \in I_0$ ، فان $X \simeq X_0$ أي $°X = X_0$

إذاً $°\left(X, F(X)\right) = (X_0, Y_0)$ هي نقطة قياسية من $°G$.

وعليه فان كل نقطة قياسية من Δ هي نقطة قياسية من $°G$ لان $°G$ تمثل شبح النقاط المحدودة من G .

بما أن Δ و$°G$ مجموعتان قياسيتان و(باستخدام بديهية الانتقال) فان كل نقطة من Δ هي نقطة من $°G$ إذاً $\Delta \subset °G$ ، وان Δ يمثل المعادلة $°X = X_0$.

(ii) لتكن (X_0, Y_0) نقطة قياسية من المستقيم Δ_α ، بما أن F دالة مستمرة و X_1 و X_2 نقطتان محدودتان تنتميان إلى I_0 ، بحيث $F(X_1) < 0$ متناهية الكبر و $F(X_2) \simeq \alpha$ ، وباستخدام نظرية القيمة المتوسطة توجد $X \in [X_1, X_2]$ (أو $X \in [X_2, X_1]$) بحيث أن $°F(X) = Y_0$.

عندما $Y_0 = \alpha$ فان $°F(X) = \alpha$

وإذا كان $Y_0 < \alpha$ فان $°F(X) = Y_0 < \alpha$ هذا يعني أن $°Y \le \alpha$.

وبطريقة مماثلة يمكن أن نبرهن أن $°Y \ge \alpha$.

بما أن $\left(X, F(X)\right)$ نقطة محدودة من G وان $X \in I_0$ ، فان $X \simeq X_0$ أي $°X = X_0$

إذاً $°\left(X, F(X)\right) = (X_0, Y_0)$ هي نقطة قياسية من $°G$.

وعليه فان كل نقطة قياسية من Δ_α هي نقطة قياسية من $°G$.

بما أن Δ_α و$°G$ مجموعتان قياسيتان وحسب بديهية الانتقال نحصل على أن كل نقطة من Δ_α هي

نقطة من ${}^{\circ}G$.

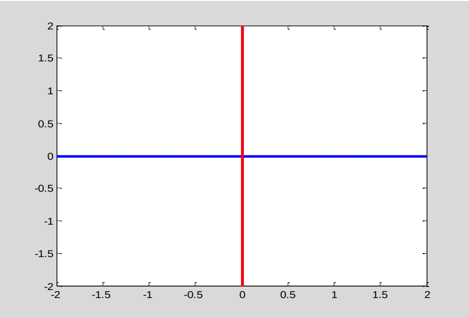
إذاً $\Delta_\alpha \subset {}^{\circ}G$. وان Δ_α يمثل المعادلة :

$$\Delta_\alpha = \left\{(X,Y)\in \boldsymbol{R}^2 : {}^{\circ}X = X_0 , {}^{\circ}Y \le \alpha \ \left(\text{على الترتيب}\ \ {}^{\circ}Y \ge \alpha\right)\right\}$$

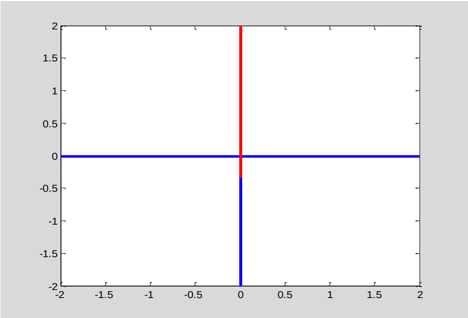
مثال (2.8): إذا كانت f دالة قياسية معرفة كالأتي : $f(x)=\sqrt{x}$ فان التمثيل للدالة f تحت مجهر بقوة $\varepsilon > 0$ متناهية الصغر متمركز عند النقطة $(\eta, f(\eta))$ حيث $\eta \simeq 0$، هما المستقيمان العموديان :

(i) ${}^{\circ}X = 0$ ، ${}^{\circ}Y \ge -{}^{\circ}\left(\frac{\sqrt{\eta}}{\varepsilon}\right)$ إذا كان $\frac{\sqrt{\eta}}{\varepsilon}$ محدود **كما في الشكل (4)**

(ii) ${}^{\circ}X = 0$ إذا كان $\frac{\sqrt{\eta}}{\varepsilon}$ متناهي الكبر **كما في الشكل (5)**



شكل (4)



شكل (5)

البرهان : تحت مجهر بقوة ε مركزه النقطة $(\eta,f(\eta))$ حيث $\eta\simeq 0$ ، عندما $X \ge -\frac{\eta}{\varepsilon}$ وباستخدام تعريف(2.2) نحصل على :

$$Y=\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}+\frac{\eta}{\varepsilon^2}}-\sqrt{\frac{\eta}{\varepsilon^2}}$$

هناك حالتان:

(i) عندما $\frac{\eta}{\varepsilon^2}$ عدد محدود و Y محدود يقتضي أنّ X متناهي الصغر،

إذا كان $X \ge -\frac{\eta}{\varepsilon}$ ، فان $Y \ge -\frac{\sqrt{\eta}}{\varepsilon}$ ، الشبح لبيان الدالة f تحت هذا المجهر

عندما $\frac{\sqrt{\eta}}{\varepsilon}$ متناهي الصغر التمثيل هو المستقيم العمودي:

$$L_1=\left\{(X,Y)\in\boldsymbol{R}^2 : {}^{\circ}X=0, {}^{\circ}Y\ge 0\right\}$$

عندما $\frac{\sqrt{\eta}}{\varepsilon}$ ليس متناهي الصغر فالتمثيل هو المستقيم العمودي :

$$L_2=\left\{(X,Y)\in\boldsymbol{R}^2 : {}^{\circ}X=0, {}^{\circ}Y\ge -{}^{\circ}\left(\frac{\sqrt{\eta}}{\varepsilon}\right)\right\}$$

(ii) عندما $\frac{\eta}{\varepsilon^2}$ متناهي الكبر فان

$$Y=\frac{\sqrt{\eta}}{\varepsilon}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\eta}X+1}-1\right)$$

إذا كان $\frac{\sqrt{\eta}}{\varepsilon}$ متناهي الكبر و Y محدودا فمن الضروري أن يكون $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\eta}X+1}\simeq 1$

إذا كان $\frac{\eta}{\varepsilon}$ محدود غير متناهي الصغر فمن الضروري أن تكون X متناهية الصغر

وإذا كان $\frac{\eta}{\varepsilon}$ متناهي الكبر فيكون $\frac{\varepsilon}{\eta}$ متناهي الصغر وان

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{\eta}X+1}=1+\frac{\varepsilon}{2\eta}X+\delta$$

حيث أن δ متناهية الصغر بالنسبة إلى $X\,\frac{\varepsilon}{\eta}$ وعليه فان :

$$Y=\frac{\sqrt{\eta}}{\varepsilon}\left(1+\frac{\varepsilon}{2\eta}X+\delta-1\right)$$

$$Y=\frac{1}{2\sqrt{\eta}}X+\delta\frac{\sqrt{\eta}}{\varepsilon}=\frac{1}{\sqrt{\eta}}\left(\frac{X}{2}+\frac{\eta}{\varepsilon}\delta\right)$$

إذا كانت النقطة(X,Y) محدودة فيكون المقدار $\left(\frac{X}{2}+\frac{\eta}{\varepsilon}\delta\right)$ متناهي الصغر ولذلك فان X متناهي الصغر.

في جميع الحالات إذا كانت $(X,F(X))$ محدودة فتكون X متناهية الصغر وعند النقاط غير المتناهية الصغر X_1 و X_2 ذات إشارات مختلفة.Y تأخذ القيم المتناهية الكبر وذات إشارة متعاكسة يكون التمثيل للدالة f تحت هذا المجهر هو المستقيم العمودي :

$$L_3=\{(X,Y)\in \boldsymbol{R}^2:{}^{\circ}X=0\}$$

المصادر

[1] Davis M. : "Applied non standard analysis"; New- York, John Wiley and Sons (1977).

[2] Diener M. and Van Den Berg I. :"Halos and Galaxies une extention du lemme de Robinson", compte rendus de l'acadimie de science de paris . t.293 serie 1.(1983) p.385-388.

[3] Goldblatt, R. "Lectures on the Hyperreals:An Introduction to Non Standard Analysis", Springer-Verlag New York, Inc. 1998.

[4] Henle J.H. and Kleinberg E.M. :"Infinitesimal Calculus", M.I.T. Press Combridge,Mass and London ,England (1979).

[5] Ibrahim Othman Hamad, "A non standard study of the Taylor series Development", M.Sc. thesis ,University of salahaddin (2000).

[6] Ibrahim Othman Hamad ,"Non standard Treatment of two dimensional Taylor series with remainder formula" , Al-Rafiden Journal of computer Sciences and Mathematics ,Mosul University ,Vol.5 ,No.1 (2005) .

[7] Nelson E. :"Internal set theory : A new approach to non standard analysis", Bull. of Amer. Math.Soc.Vol.83.No. 6 (November 1977) p.1165-1198.

[8] Pugh ,C.C., "Real Mathematical Analysis" , Springer-Verlag New York, Inc. 2002.

[9] Rashad Rashid Haji, "Non standard approximation and successive shadow development ", M.Sc. thesis, University of salahaddin (2000).

[10] Robinson, A. "Non standard analysis" 2^{nd} .ed. American Elsevier New-York (1970).

[11] Stroyan K.D. and Luxemburg W.A., "Introduction to the theory of infinitesimal ,New-York, Academic press (1976).

[12] Vladimir, K. and Reeken, M. "Non standard Analysis , Axiomatically" ,Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2004.